Prof. Dr. Robert Schwager
Georg-August-Universität Göttingen
Volkswirtschaftliches Seminar

Mikroökonomik I

Sommersemester 2005

Termin und Ort

Vorlesung

Donnerstag, 12:15-13:45 (ZHG 010)
erster Termin: Do, 14. April 2005,
Mittwoch, 16:15-17:45 (ZHG 011),
nur am 20. April, 27. April, 11. Mai, 18. Mai, 25. Mai, 01. Juni

Tutorien

siehe Aushang / UniVIS,
Beginn: Anfang Mai 2005.

Mikroökonomik I:
Einzelwirtschaftliche Entscheidungen

1. Einführung in die wirtschaftstheoretische Methode: Der Wohnungsmarkt
Varian (2003), Kap. 1

A. Theorie des Haushalts

2. Das Budget
Varian (2003), Kap. 2

3. Präferenzen und Nutzenfunktion
Varian (2003), Kap. 3, 4
Feess (2000), Kap. 8

4. Nutzenmaximierung und Ausgabenminimierung
Varian (2003), Kap. 5
Feess (2000), Kap. 9.1 - 9.2

5. Einkommens- und Preisänderungen
Varian (2003), Kap. 6, 8
Feess (2000), Kap. 9.3 - 9.6

6. Arbeitsangebot
Varian (2003), Kap. 9
Feess (2000), Kap. 10

B. Theorie des Unternehmens

7. Technologie und Produktionsfunktion

Varian (2003), Kap. 18

Feess (2000), Kap. 3.1 - 3.4, 3.6 - 3.7

8. Gewinnmaximierung

Varian (2003), Kap. 19

Feess (2000), Kap. 6.1 -6.2

9. Kostenminimierung

Varian (2003), Kap. 20

Feess (2000), Kap. 3.6, 6.3 - 6.5

10. Kostenkurven

Varian (2003), Kap. 21

Feess (2000), Kap. 4

11. Der Wettbewerbsmarkt

Varian (2003), Kap. 22, 23, 16

Feess (2000), Kap. 5, 13

Mikroökonomik II: Märkte und strategisches Verhalten

C. Wettbewerbsmärkte

12. Wettbewerb und Monopol auf einem einzelnen Markt
13. Allgemeines Gleichgewicht
14. Ersparnis und Investition
15. Risiko und Versicherung

D. Spieltheorie und oligopolistische Märkte

16. Spiele in Normalform
17. Sequenzielle Entscheidungen
18. Oligopoltheorie
19. Asymmetrische Information

Literatur

Bergstrom, T. und H. Varian (2003): Workouts in intermediate microeconomics, 6. Aufl., New York: Norton.

Böhm, V. (1995): Arbeitsbuch zur Mikroökonomik, Band I, 3. Aufl., Berlin: Springer.

Böhm, V. (1993): Arbeitsbuch zur Mikroökonomik, Band II, 2. Aufl., Berlin: Springer.

Chiang, A. (1984): Fundamental methods of mathematical economics, 3. Aufl., New York: McGraw-Hill.

Feess, E. (2000): Mikröokonomie: eine spieltheoretisch- und anwendungsorientierte Einführung, 2. Aufl., Marburg: Metropolis.

Kreps, D. (1990): A course in microeconomic theory, New York: Harvester Wheatsheaf.

Varian, H. (2003): Intermediate microeconomics: a modern approach, 6. Aufl., New York: Norton.

1. Einführung in die wirtschaftstheoretische Methode:

Der Wohnungsmarkt

- Die Wirtschaftstheorie entwickelt **Modelle** sozialer Phänomene.

  Ein Modell ist eine vereinfachte Darstellung der Wirklichkeit.
- Beispiel: Der Preis von Wohnungen
- Annahmen:
  - es gibt nur zwei Arten von Wohnungen. Die einen sind nahe der Universität gelegen (innerer Ring), die anderen sind weiter entfernt (äußerer Ring).

– Es gibt mehr Interessenten für die inneren Wohnungen als solche Wohnungen vorhanden sind.

– der Preis der Wohnungen im äußeren Ring, das Einkommen der Wohnungssuchenden, die Anzahl der Wohnungen im inneren Ring sind **exogen.** D.h. diese Größen werden nicht durch das Modell erklärt.

Fragen

– Wie hoch ist die Miete im inneren Ring?

– Wer wohnt in den Wohnungen im inneren Ring? (**Allokation**)

– Wie wünschenswert sind unterschiedliche Verfahren zur Zuteilung der Wohnungen?

Preis und Allokation sind **endogen**, d.h. sie werden durch das Modell erklärt.

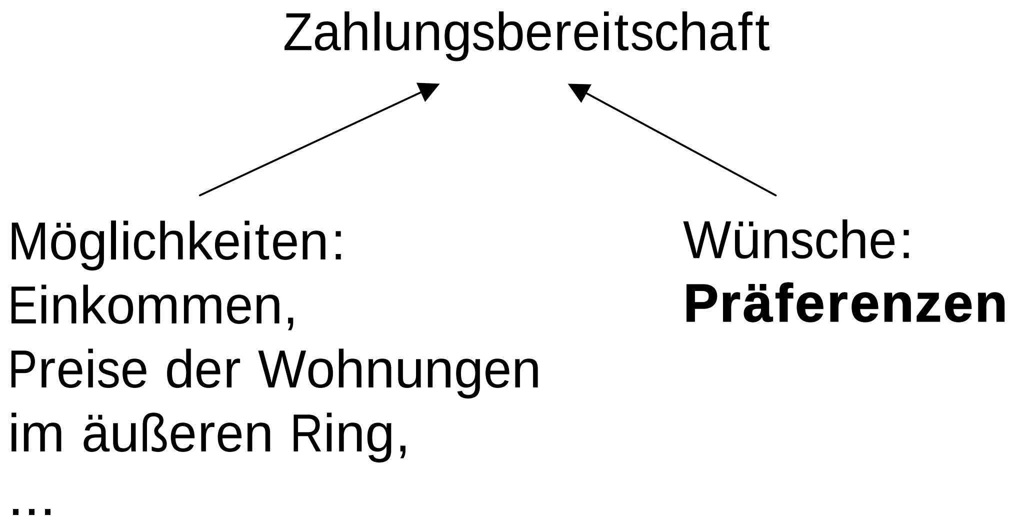
Die ökonomische Methode: Prinzipien der Erklärung menschlichen Verhaltens

– Das **Optimierungsprinzip**: Jeder Mensch wählt die beste der ihm zur Verfügung stehenden Möglichkeiten.

– Das **Gleichgewichtsprinzip**: Die Entscheidungen müssen alle zugleich durchführbar sein.

Die Nachfrage

Vorbehaltspreis: Maximale Zahlungsbereitschaft einer Person



Zahlungsbereitschaft

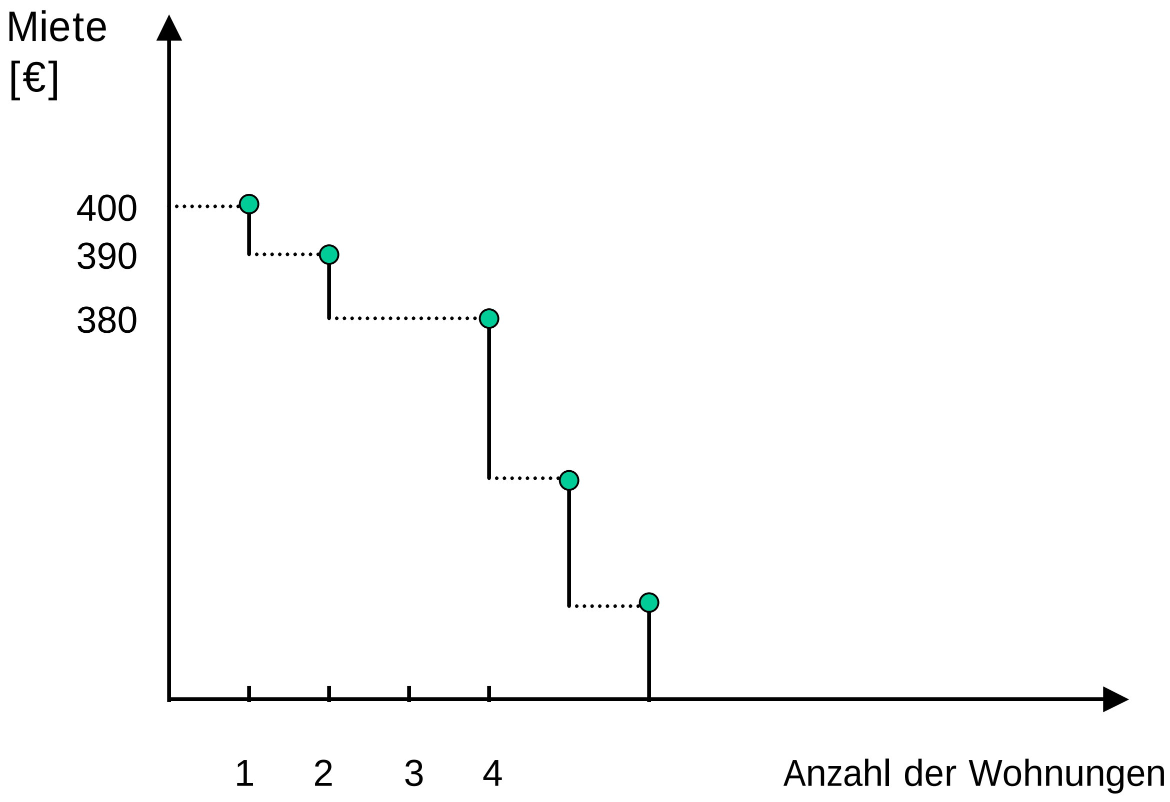
Möglichkeiten:
Einkommen,
Preise der Wohnungen
im äußeren Ring,
...

Wünsche:
Präferenzen

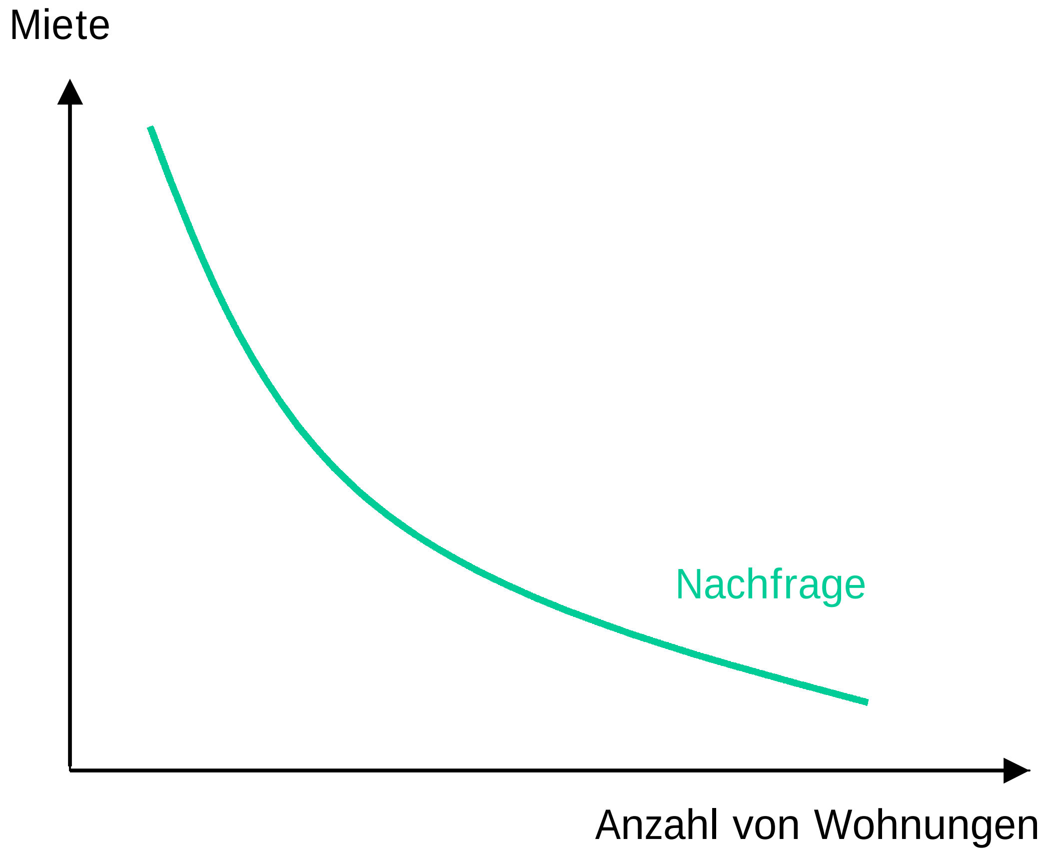
Nachfragekurve: Beschreibt die nachgefragte Menge zu jedem möglichen Preis.

Konstruktion der Nachfragekurve: absteigend geordnete Liste aller Vorbehaltspreise, z.B.

- eine Person mit Vorbehaltspreis € 400
- eine Person mit Vorbehaltspreis € 390
- zwei Personen mit Vorbehaltspreis € 380
- usw.



Nachfragekurve bei vielen Nachfragern



- Bei vielen Nachfragern sind die Sprünge zwischen den Preisen klein.
- **Stetige** Nachfragekurve

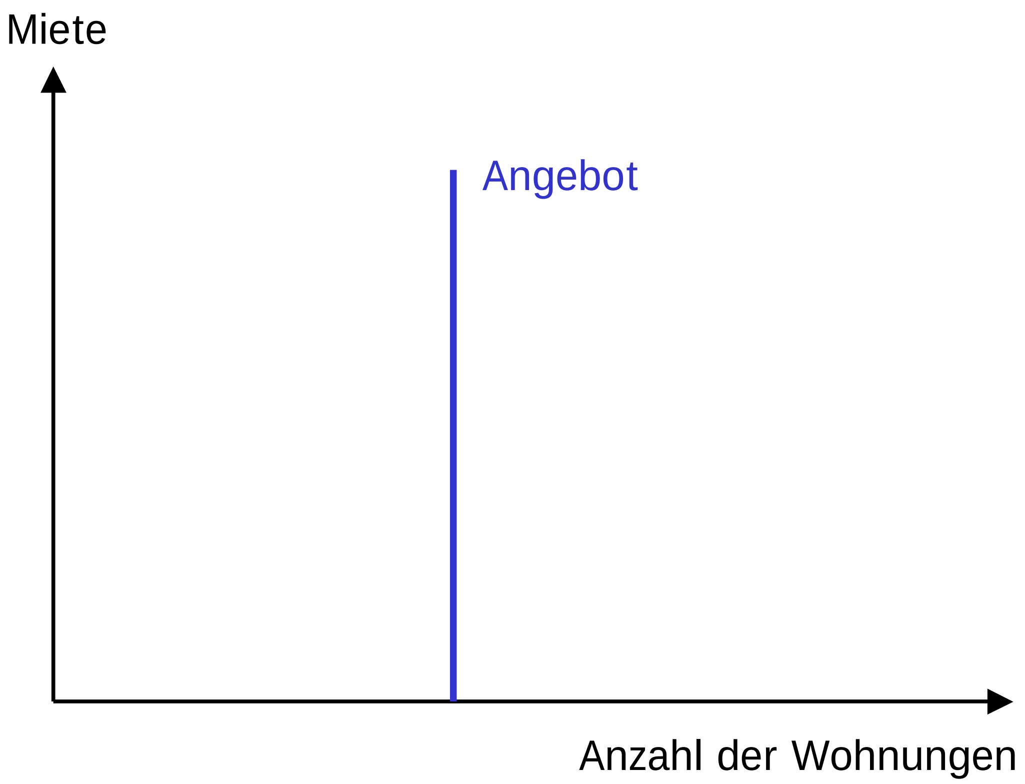
Das Angebot (die Vermieter)

Angebotskurve: Beschreibt die zu jedem der möglichen Preise angebotene Menge.

Konstruktion der Angebotskurve

Annahmen:

- Die Vermieter sind daran interessiert, ihre Wohnungen zum höchstmöglichen Preis zu vermieten.
- Die Zahl der Wohnungen ist kurzfristig fest.
- **Wettbewerb (Konkurrenz):** jeder Vermieter handelt im eigenen Interesse, keine Preisabsprachen, Vermieter sind **Preisnehmer**.



Marktgleichgewicht

Behauptung: Der Preis aller Wohnungen im inneren Ring muß einheitlich sein.

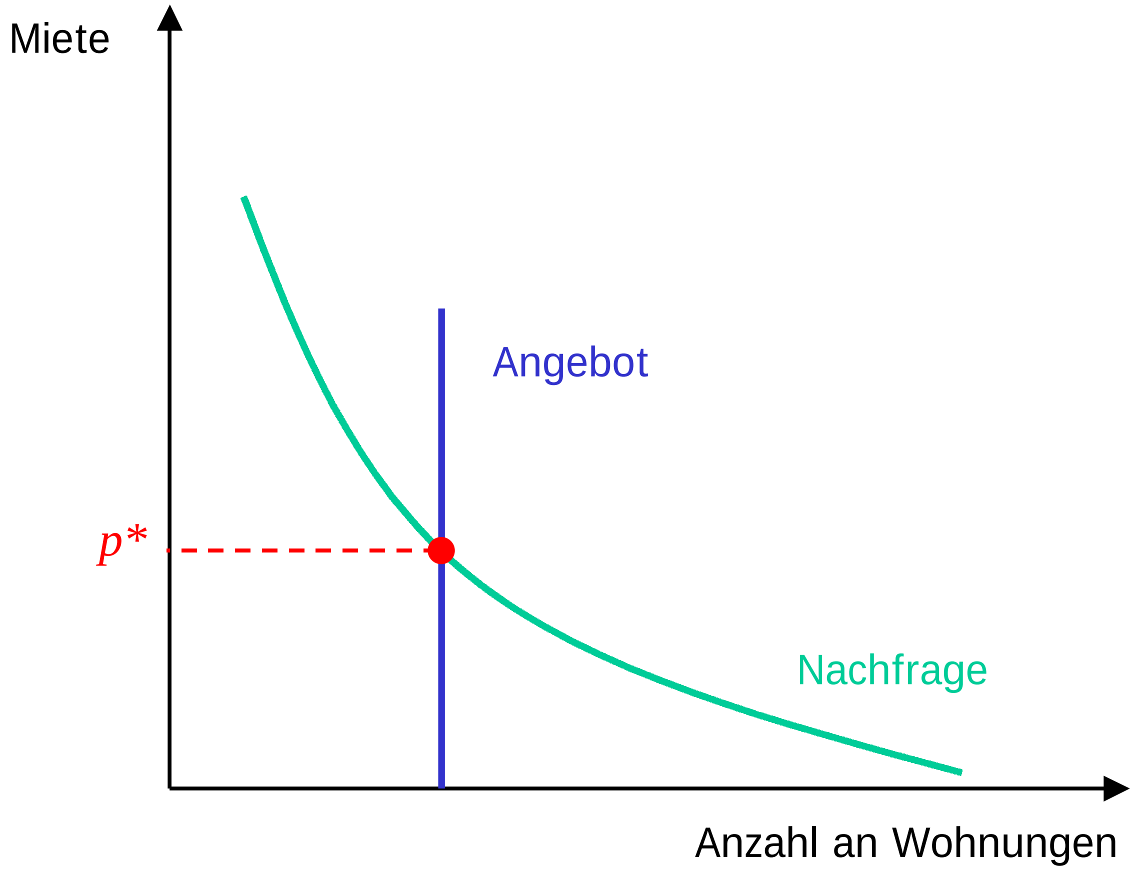
Beweis durch Widerlegung des Gegenteils:

- Mieter A zahlt p_h , Mieter B zahlt $p_l < p_h$. Mieter A kann dem Vermieter von B für B ’s Wohnung eine Miete zwischen p_l und p_h bieten.
- Das lohnt sich für A und den Vermieter; sie werden einen Mietvertrag über die Wohnung abschließen.
- Widerspruch zum Gleichgewichtsprinzip.

Gleichgewichtspreis p^*: Der Preis, bei dem die nachgefragte Anzahl von Wohnungen gleich der angebotenen ist.

Allokation im Gleichgewicht: Personen mit einem Vorbehaltspreis über p^* werden im inneren Ring und solche mit einem Vorbehaltspreis unter p^* werden im äußeren Ring wohnen.

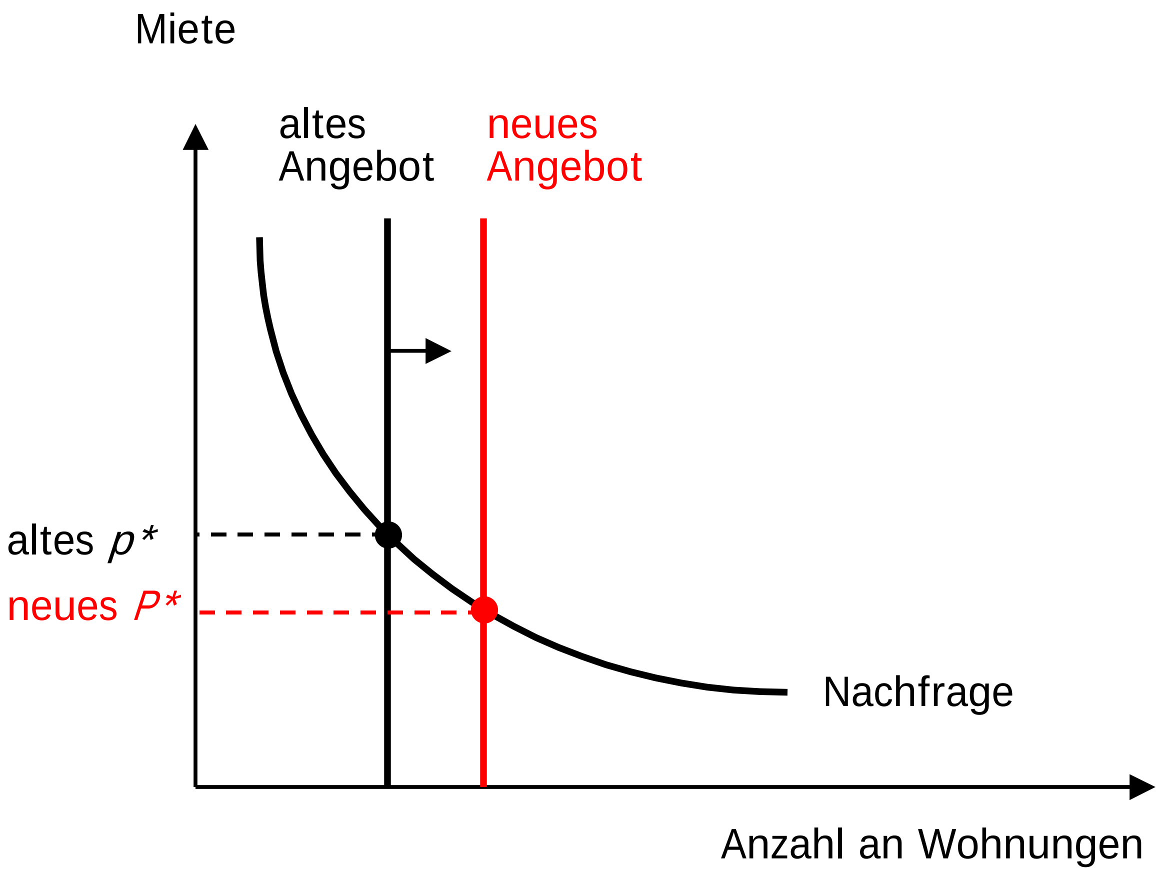
Das Wettbewerbsgleichgewicht



Komparative Statik

- Wie ändert sich das Gleichgewicht, wenn sich exogene Größen ändern?
- **Vergleich** zwischen zwei Gleichgewichts**zuständen**

Beispiel: Erhöhung des Wohnungsangebots

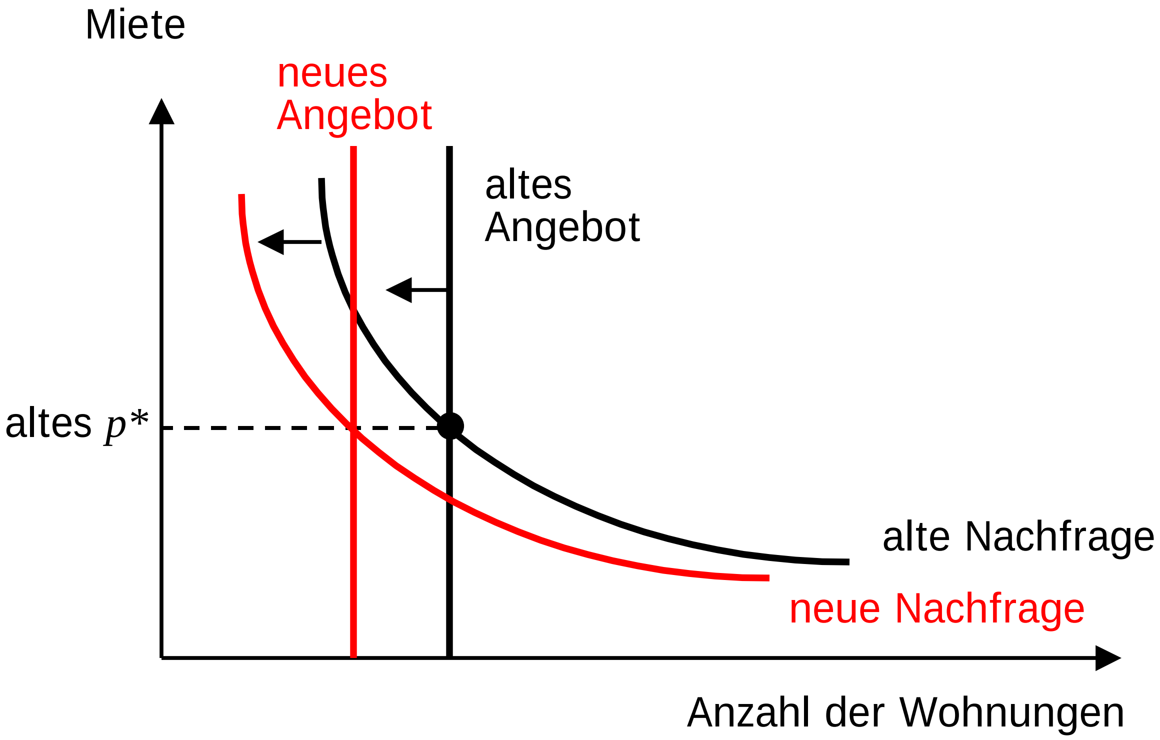


Beispiel: Umwandlung mehrerer Mietwohnungen in Eigentumswohnungen

1. Effekt: Das Angebot an Mietwohnungen sinkt.

2. Effekt: Da einige Mieter von Wohnungen sich nun entschließen könnten, die neuen Eigentumswohnungen zu kaufen, sinkt die Nachfrage nach Mietwohnungen ebenfalls.

Wenn sich Nachfrage und Angebot in gleichem Ausmaß nach links verschieben, bleibt der Gleichgewichtspreis unverändert.



Beispiel: Grundsteuer

- Jeder Vermieter muß € 50 pro Monat für jede seiner Wohnungen zahlen.
- Die Angebotskurve ändert sich nicht, da die Zahl der Wohnungen unverändert bleibt.
- Die Nachfragekurve ändert sich auch nicht.
- Folgerung: Der Gleichgewichtspreis ändert sich nicht.
- Die Vermieter tragen die Steuer.

Anwendung: Wer profitiert vom Wohngeld?

Andere Verfahren der Allokation von Wohnungen

1. Der **Konkurrenzmarkt** wie in vorheriger Analyse

2. Der **diskriminierende Monopolist**

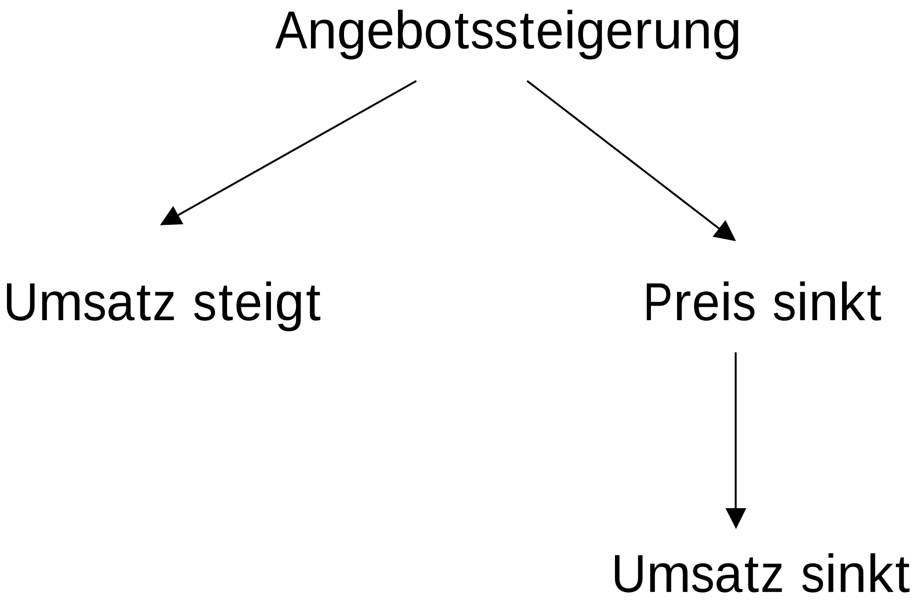
- besitzt alle Wohnungen
- kennt alle Vorbehaltspreise
- kann Untervermietung verhindern

Gleichgewicht:

- Jeder Mieter zahlt seinen Vorbehaltspreis
- Die Interessenten, deren Zahlungsbereitschaft größer ist als $p*$, erhalten die Wohnungen im inneren Ring.

3. Der (gewöhnliche) **Monopolist**

- besitzt alle Wohnungen
- kennt die Nachfragekurve
- muß von allen Mietern die gleiche Miete verlangen.



Angebotssteigerung

Umsatz steigt

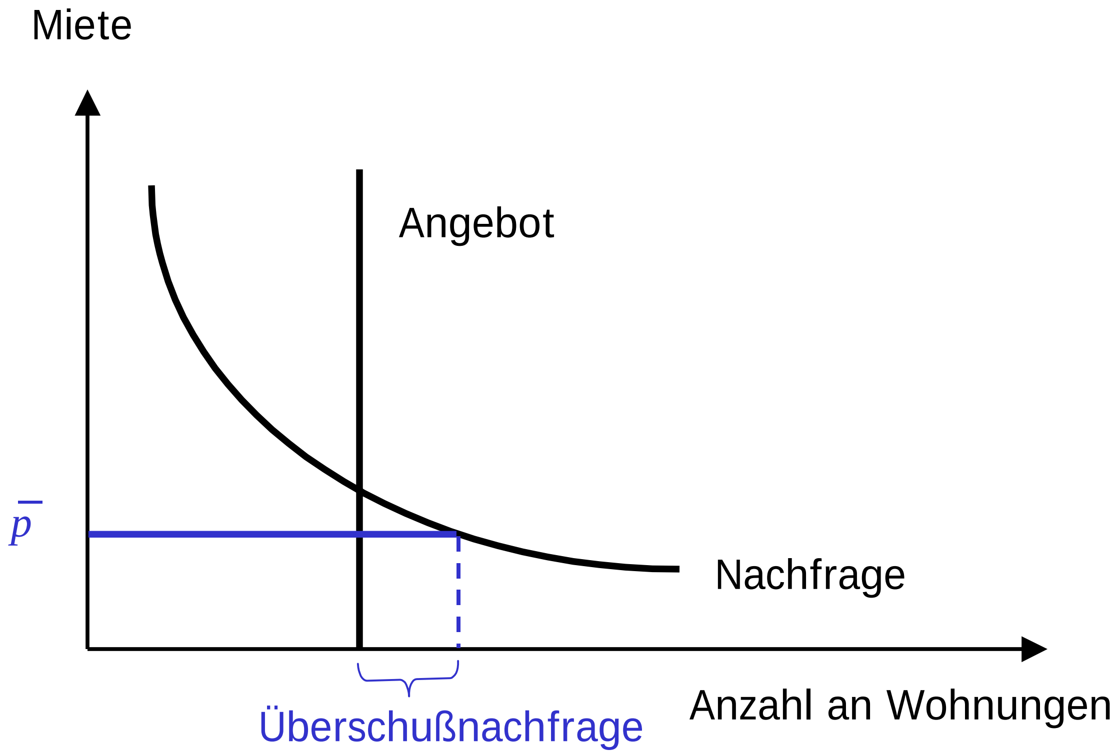
Preis sinkt

Umsatz sinkt

Ein Monopolist wird nicht alle Wohnungen vermieten.

4. Mietenbegrenzung

- $\bar{p} < p^*$ als höchste zulässige Miete
- Rationierung der Nachfrager
- i.d.R. erhalten nicht die Nachfrager mit den größten Zahlungsbereitschaften die inneren Wohnungen.



Vergleich unterschiedlicher Arten der Allokation von Wohnungen

Welches der Allokationsverfahren

- Konkurrenzmarkt
- diskriminierender Monopolist
- gewöhnlicher Monopolist
- Mietenkontrolle

ist das “beste”?

Pareto-Effizienz: Eine Situation ist Pareto-effizient, wenn es keine Möglichkeit gibt, jemanden besser zu stellen, ohne jemand anderen dadurch schlechter zu stellen.

Pareto-Verbesserung: Eine Veränderung der Situation, so daß es einer Person besser geht, aber niemandem schlechter.

In einer Pareto-effizienten Situation gibt es keineTauschmöglichkeiten mehr, die sich für beide Partner lohnen.

Pareto-Effizienz der 4 Allokationen

- **Monopol**: Die Vermietung einer leeren Wohnung zu einem beliebigen positiven Preis ist eine Pareto-Verbesserung.
- **Mietenbegrenzung**: Es gibt Personen, die im äußeren Ring wohnen und bereit sind, mehr zu zahlen als Personen mit einer Wohnung im inneren Ring, so dass es ein Potential für Tauschgewinne gibt.

Kriterium für Pareto-Effizienz in diesem Modell:

- Alle Wohnungen sind vermietet.
- Die Personen mit den größten Zahlungsbereitschaften wohnen im inneren Ring.

Pareto-effiziente Allokationen:

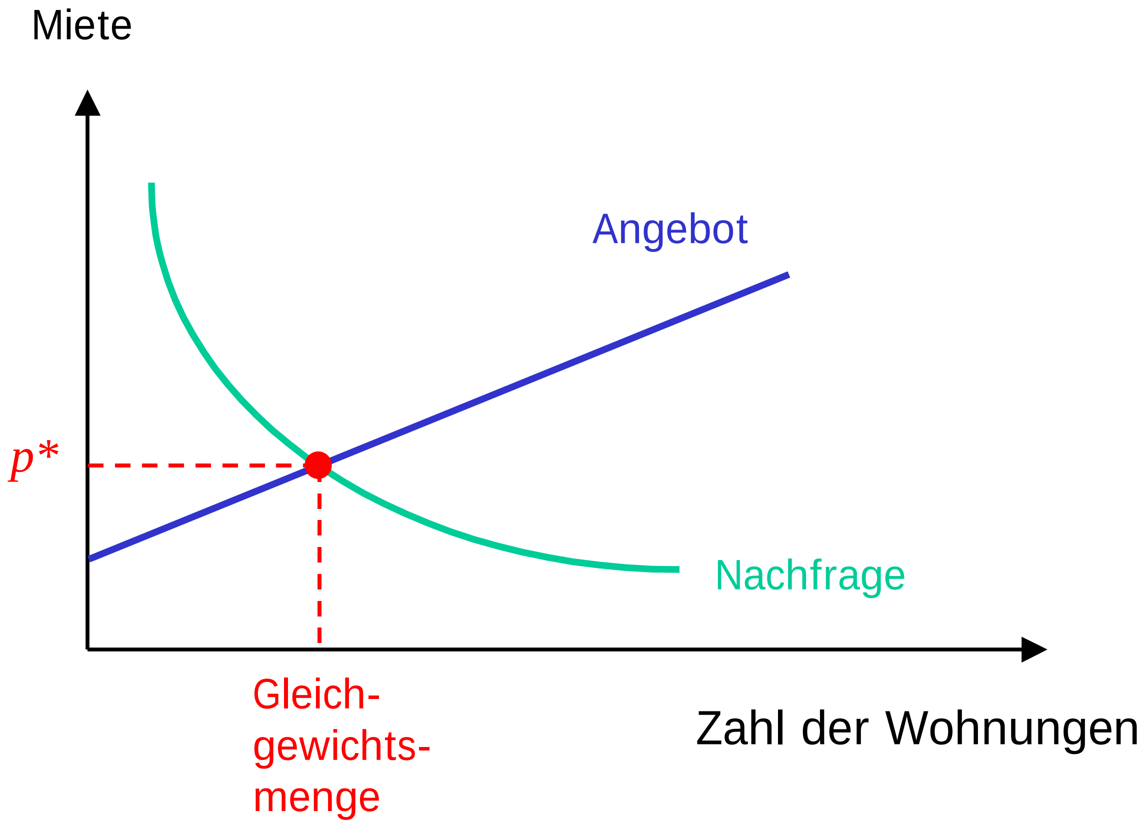
- Wettbewerbsmarkt
- Diskriminierender Monopolist

Nicht Pareto-effiziente **(ineffiziente)** Allokationen:

- Monopolist
- Mietenbegrenzung

Langfristiges Gleichgewicht

- Neubau
- Angebot hängt vom Preis ab: Je höher die Miete, desto mehr Wohnungen werden gebaut.
- Die Angebotskurve verläuft steigend.
- Die Gleichgewichtsmenge ist endogen.



Zusammenfassung

- In der Wirtschaftswissenschaft werden **Modelle** sozialer Phänomene erstellt, die vereinfachte Darstellungen der Wirklichkeit sind.
- Dabei werden zwei methodische Prinzipien beachtet:
  - Das **Optimierungsprinzip**: Jeder Mensch wählt die beste der ihm zur Verfügung stehenden Möglichkeiten.
  - Das **Gleichgewichtsprinzip**: Die Entscheidungen müssen alle zugleich durchführbar sein.
- Die **Nachfragekurve** gibt für jeden Preis an, wieviel die Käufer zu diesem Preis nachfragen wollen, die **Angebotskurve** gibt für jeden Preis an, wieviel die Verkäufer zu diesem Preis anbieten wollen. Bei einem **Gleichgewichtspreis** sind Angebots- und Nachfragemenge gleich groß.

- **Komparative Statik** untersucht, wie sich das Gleichgewicht verändert, wenn sich eine der zugrundeliegenden Bedingungen verändert.
- Eine Situation ist **Pareto-effizient,** wenn keine Möglichkeit besteht, jemanden besser zu stellen, ohne gleichzeitig jemand anderen schlechter zu stellen.

A. Theorie des Haushalts

Der private Haushalt

- ... konsumiert Güter
- ... bietet Güter und Faktorleistungen an.

Güter und Faktorangebote werden in der Regel als Stromgrößen gemessen, z.B.:

- 10 Pizzas pro Monat
- ½ Liter Bier pro Tag
- die Nutzung eines Autos während eines Monats
- 40 Arbeitsstunden pro Woche

Der Konsum während eines Zeitabschnitts wird durch einen Vektor dargestellt, der die konsumierten Mengen aller Güter darstellt. Ein solcher Vektor heißt **Güterbündel** (Konsumplan, Konsumbündel)

$$x = (x_1, x_2, ..., x_k).$$

Wünsche: **Präferenzen** → Kapitel 3

Möglichkeiten:

- Die **Konsummenge** X enthält alle physisch konsumierbaren Güterbündel.
- Die **Budgetmenge** B enthält alle bezahlbaren Güterbündel. → Kapitel 2

Optimierung: Der Haushalt konsumiert das Güterbündel, das ihm von allen physisch konsumierbaren, bezahlbaren Güterbündeln am liebsten ist. → Kapitel 4 - 6

2. Das Budget

Güterbündel, die der Haushalt sich leisten kann, erfüllen die **Budgetbeschränkung.** Alle diese Bündel zusammen bilden die Budgetmenge.

Die **Güterpreise** $p_1, p_2, ..., p_\mathrm{k}$ sind exogen.

Der Preis eines Gutes gibt an, wie viele Geldeinheiten man für eine Mengeneinheit dieses Gutes bezahlen muß.

Z.B. Dimension des Preises p_1 : $\left[\frac{€}{\mathrm{ME}_1}\right]$

Zwei Varianten der Budgetmenge:

- Der Haushalt erhält ein exogenes Einkommen in Höhe von $m > 0$ Geldeinheiten (→ Kapitel 2-5):

$$\sum_{i=1}^{k} p_i x_i \leq m$$

Ausgaben ≤ Einnahmen

- Der Haushalt besitzt eine **Anfangsausstattung** von Gütern, die er verkaufen kann. Der Wert der Anfangsausstattung ist sein Einkommen.

Beispiele:

Bestände an Konsumgütern,
Faktorausstattungen (Arbeit, Kapital, Boden)

→ Kapitel 6 und 13 - 15 in Mikroökonomik II

Budgetgleichung $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$

Budgetgerade $x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$

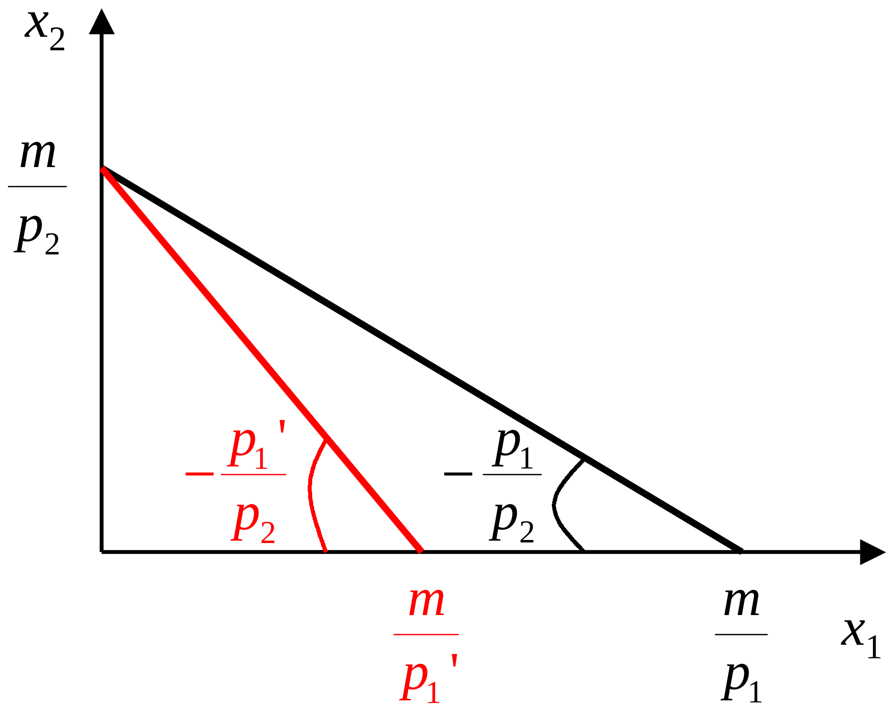
p_1/p_2 ist der **Relativpreis** (das Preisverhältnis). Wenn der Haushalt 1 Einheit weniger von Gut 1 kauft, dann kann er p_1/p_2 zusätzliche Einheiten von Gut 2 kaufen.

Dimension:

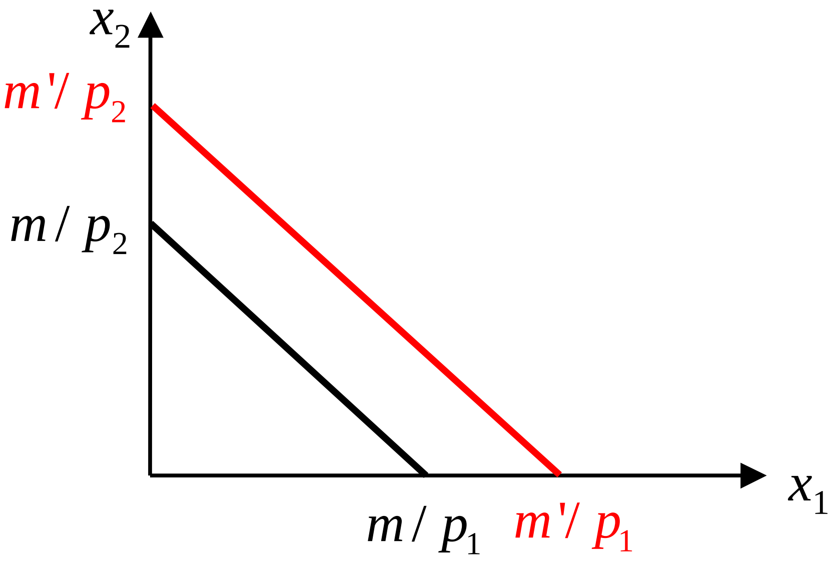
$$\left[\frac{\frac{€}{\mathrm{ME}_1}}{\frac{€}{\mathrm{ME}_2}} = \frac{\mathrm{ME}_2}{\mathrm{ME}_1} \right]$$

Komparative Statik

- Ein Preis steigt, z.B. von p_1 auf $p_1' > p_1$



- Das Einkommen steigt von m auf m'



- Das Einkommen und alle Preise steigen um den selben Faktor $t > 0$. Es gilt also $m' = tm$, $p_1' = t\,p_1$ und $p_2' = t\,p_2$.

  Die Budgetgleichung

  $$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

  wird zu

  $$p_1' x_1 + p_2' x_2 = m'$$

  also

  $$t\,p_1 x_1 + t\,p_2 x_2 = t\,m,$$

  d.h.

  $$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

  Die Budgetmenge ändert sich nicht, wenn alle Preise und das Einkommen proportional steigen.

Zusammenfassung

- Ein Güterbündel ist eine Liste von Mengen von Konsumgütern.
- Die Budgetbeschränkung gibt an, welche Güterbündel sich ein Haushalt leisten kann.
- Das Preisverhältnis p_1/p_2 gibt an, auf wie viele Einheiten des Gutes 2 man verzichten muß, um sich eine zusätzliche Einheit des Gutes 1 kaufen zu können.
- Wenn ein Preis sich verändert, dann dreht sich die Budgetgerade.
- Wenn das Einkommen sich verändert, dann verschiebt sich die Budgetgerade parallel.
- Die Budgetbeschränkung ändert sich nicht, wenn alle Preise und das Einkommen um denselben Faktor steigen.

3 Präferenzen und Nutzenfunktion

Die **Präferenzrelation** (Präferenzordnung) $\succsim$

- drückt die Wünsche des Konsumenten aus,
- ordnet jeweils zwei konsumierbare Güterbündel

x und y.

$x \succsim y$ bedeutet: „ Der Haushalt findet das Güterbündel x mindestens so gut wie das Güterbündel y. “

Andere Sprechweisen:

„ Der Haushalt zieht das Güterbündel x dem Güterbündel y schwach vor. “

„ Der Haushalt präferiert das Güterbündel x schwach gegenüber dem Güterbündel y.“

Abgeleitete Relationen

Strenge Präferenz $\succ$

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y, \text{ aber nicht } y \succsim x.$$

„ x ist strikt besser als y.“

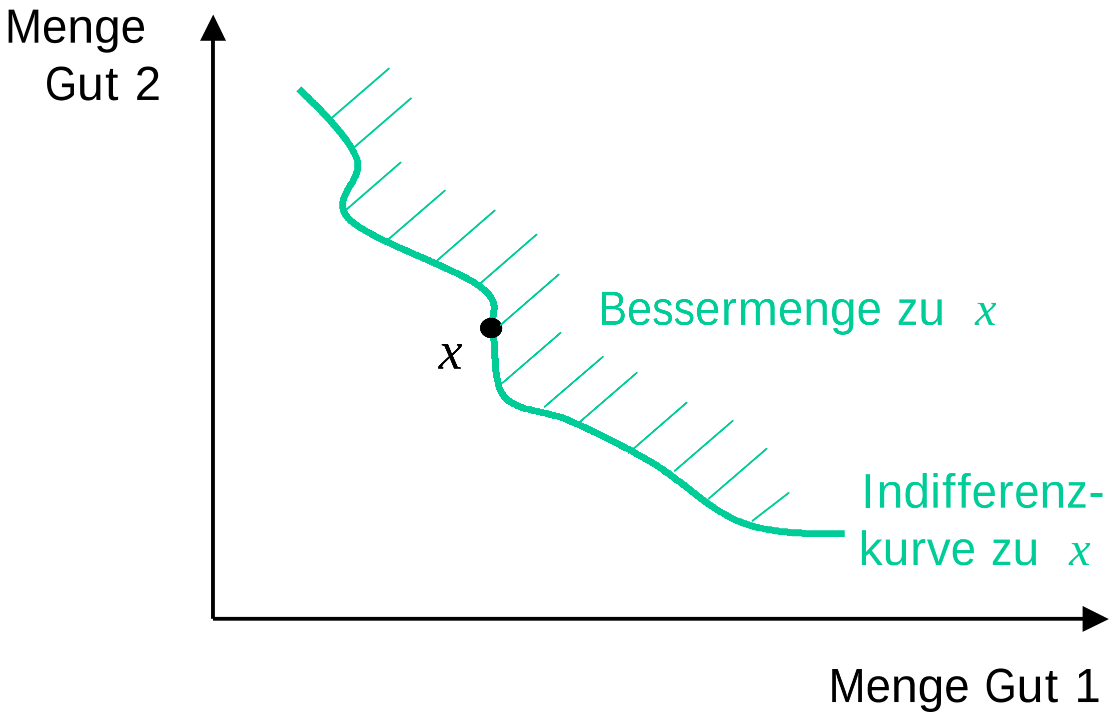
Indifferenz $\sim$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ und } y \succsim x.$$

„ x ist genauso gut wie y;“
„der Haushalt ist indifferent zwischen x und y. “

Die **Indifferenzkurve** zum Güterbündel x besteht aus allen Güterbündeln y, die genauso gut sind wie x, d.h. für die $x \sim y$ gilt.

Die **Bessermenge** zu x enthält alle Bündel y, die mindestens so gut sind wie x, d.h. für die $y \succsim x$ gilt.



Standard-Annahmen über Präferenzen

Vollständigkeit

Für alle x, y gilt:

$$x \succsim y \quad \text{oder} \quad y \succsim x.$$

Reflexivität

Für alle x gilt:

$$x \succsim x$$

Transitivität

Für alle x, y, z gilt:

Wenn $x \succsim y$ und $y \succsim z$,
dann $x \succsim z$.

Nur wenn Präferenzen transitiv sind, ist es sinnvoll, nach einem „ besten“ Güterbündel zu suchen.

Vollständigkeit, Reflexivität und Transitivität sind Grundanforderungen an **rationales** Verhalten.

Beispiel für eine nicht-transitive strenge Präferenzordnung $\succ$

A:	Veltins	$\succ$	Warsteiner + 1 €
B:	Warsteiner	$\succ$	Jever + 1 €
C:	Jever	$\succ$	Veltins + 1 €

Weitere Eigenschaften von Präferenzrelationen

Monotonie

Wenn $x_1 \geq y_1$ und $x_2 \geq y_2$ gilt,

dann ist $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$.

„ Mehr ist besser.“

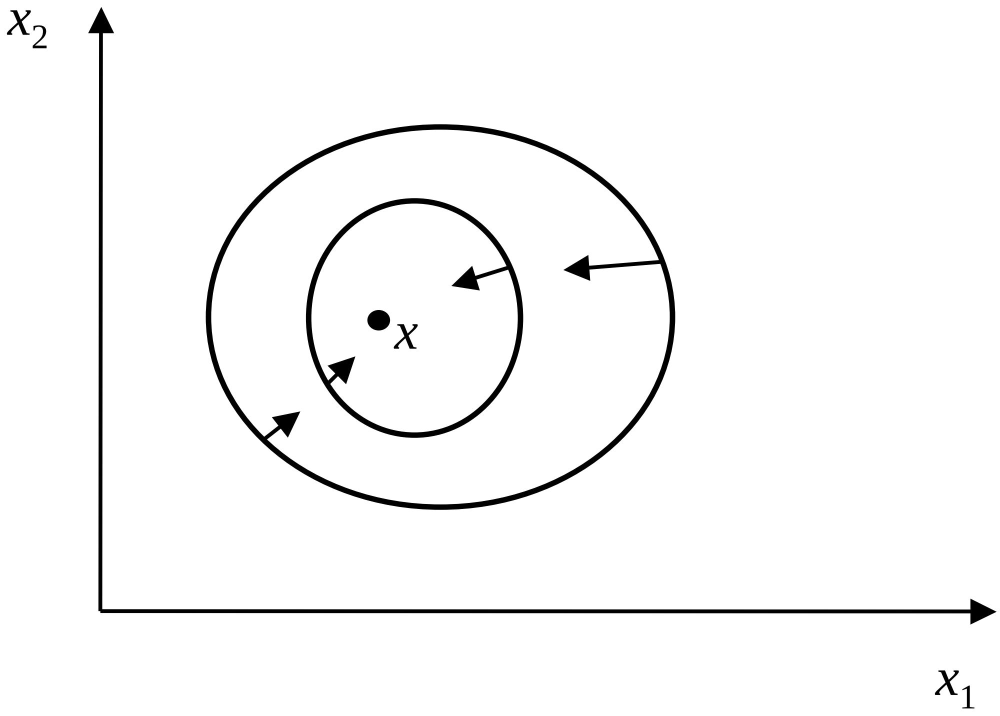
Strenge Monotonie

Wenn $x_1 \geq y_1$ und $x_2 \geq y_2$ und dabei mindestens einmal $>$ gilt,

dann ist $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$.

Sättigung

x ist ein Sättigungspunkt, wenn x mindestens so gut ist wie alle konsumierbaren Güterbündel y, d.h. wenn $x \succsim y$ für alle y gilt.



Kann eine streng monotone Präferenzrelation einen Sättigungspunkt haben?

Konvexität

Der gewogene Durchschnitt zweier gleich guter Güterbündel ist mindestens so gut wie diese Güterbündel.

Beispiel:

Der Haushalt sei indifferent zwischen den Güterbündeln x und y mit

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 8$$
$$y_1 = 12, \quad y_2 = 4$$

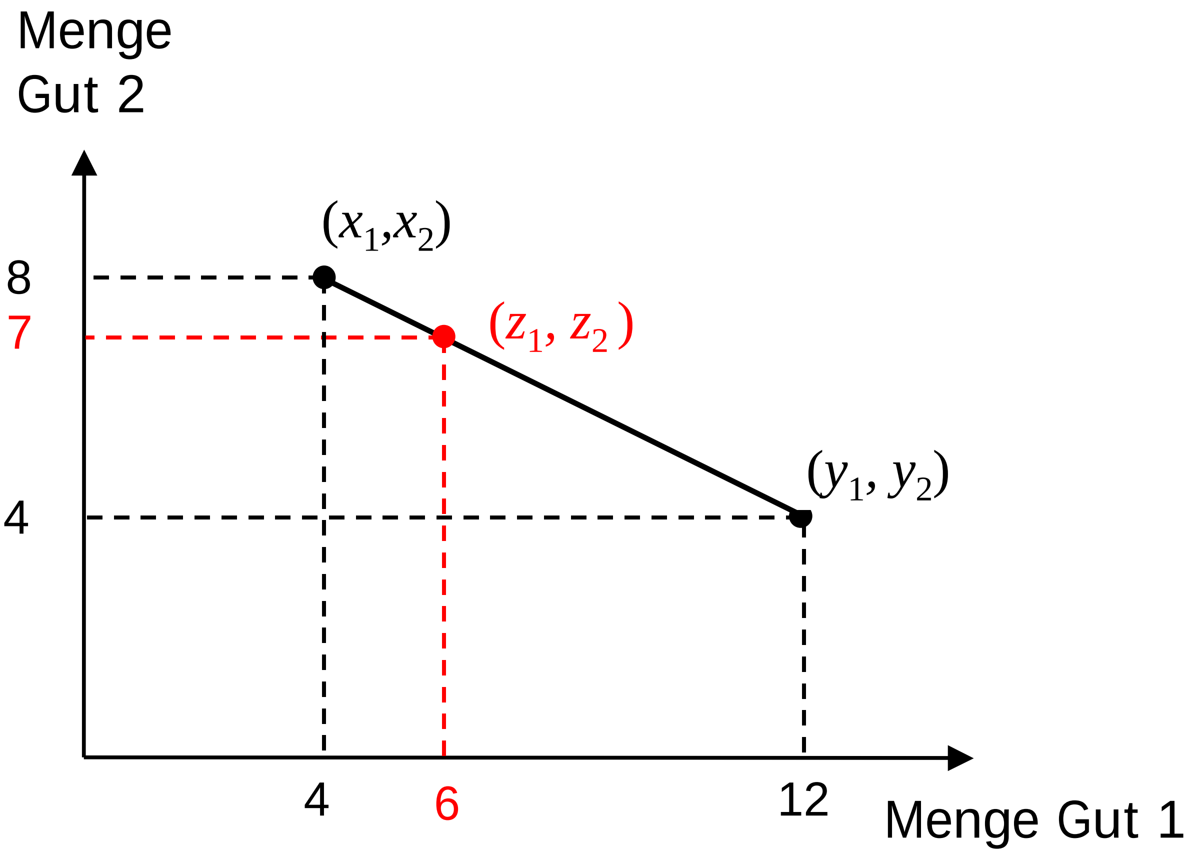
$t = 0{,}75$ Gewichtungsfaktor

Ist das Güterbündel $z = tx + (1\text{-}t)y$, d.h.

$$z_1 = 0{,}75 \cdot 4 + 0{,}25 \cdot 12 = 6$$ und

$$z_2 = 0{,}75 \cdot 8 + 0{,}25 \cdot 4 = 7$$

besser oder schlechter als die Bündel x und y?



Wenn die Präferenzrelation konvex ist, gilt $z \succsim y$

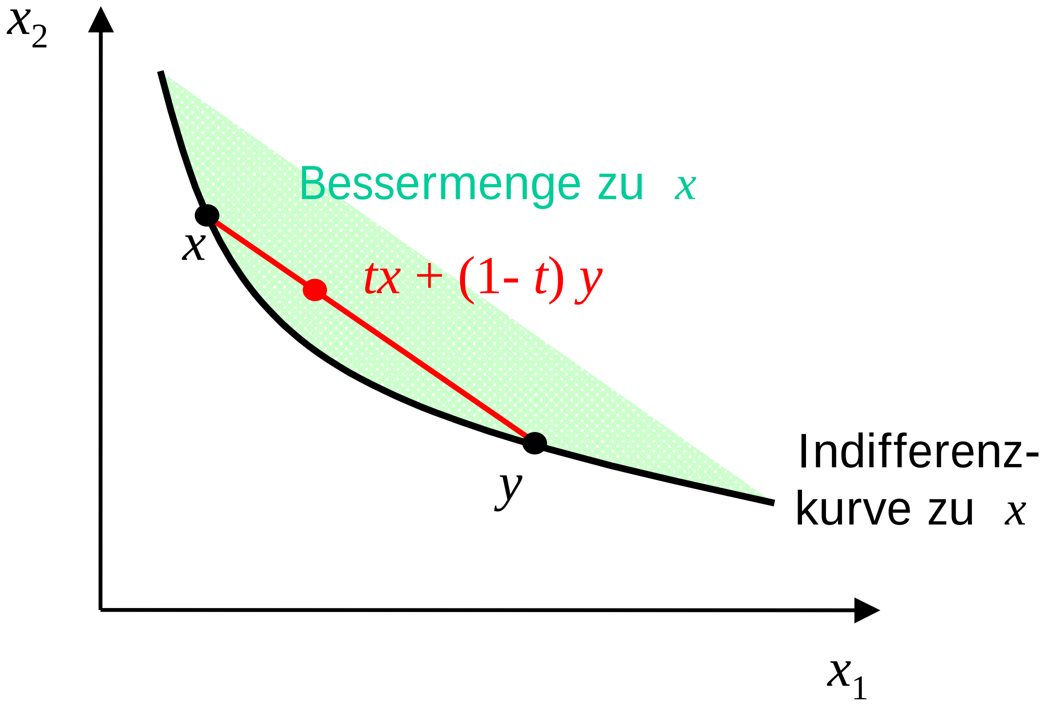
Die Indifferenzkurve verläuft unterhalb der Verbindungsgeraden von (x_1,x_2) nach (y_1,y_2).

Interpretation:
„Abwechslung erfreut".

Definition:

Eine Präferenzrelation ist konvex, wenn für alle x, y mit $x \sim y$ und für beliebiges $0 \leq t \leq 1$ gilt:

$$tx + (1-t)y \succsim x.$$



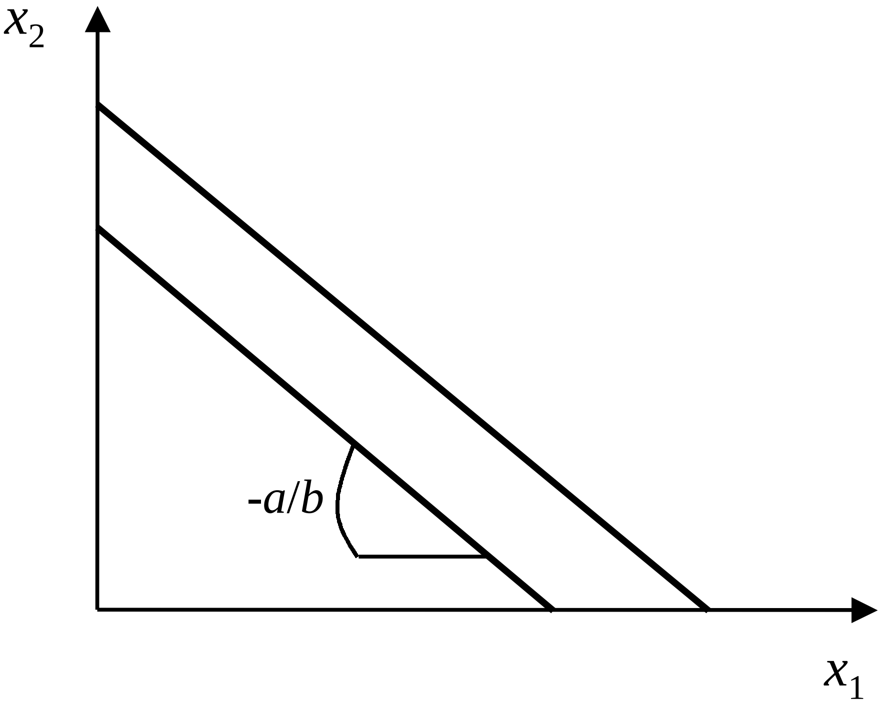
Beispiele für Präferenzrelationen

Vollkommene Substitute

z.B. Nahrungsmittel, bei denen nur die Kalorienanzahl zählt. Gut 1 hat a Kalorien/kg, Gut 2 hat b Kalorien/kg.

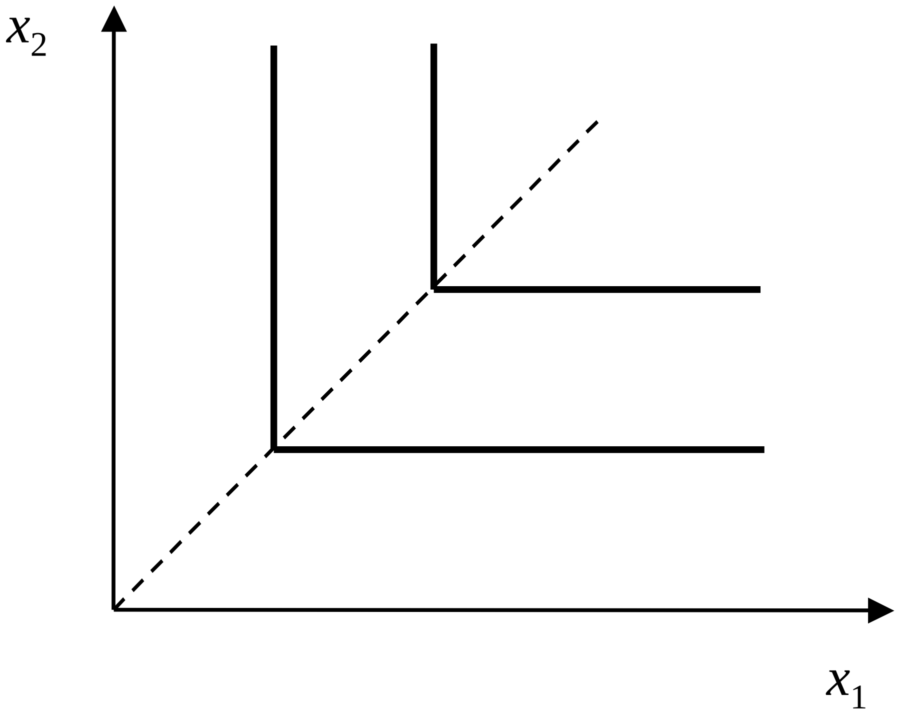
$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$, wenn

$$ax_1 + bx_2 \geq ay_1 + by_2$$



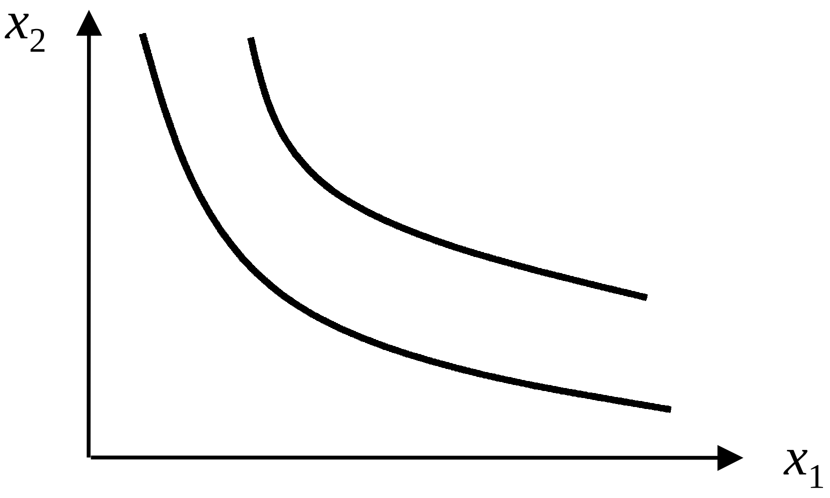
Vollkommene Komplemente

z.B. rechte und linke Schuhe



Standard-Präferenzen

konvex, streng monoton



Nutzenfunktion

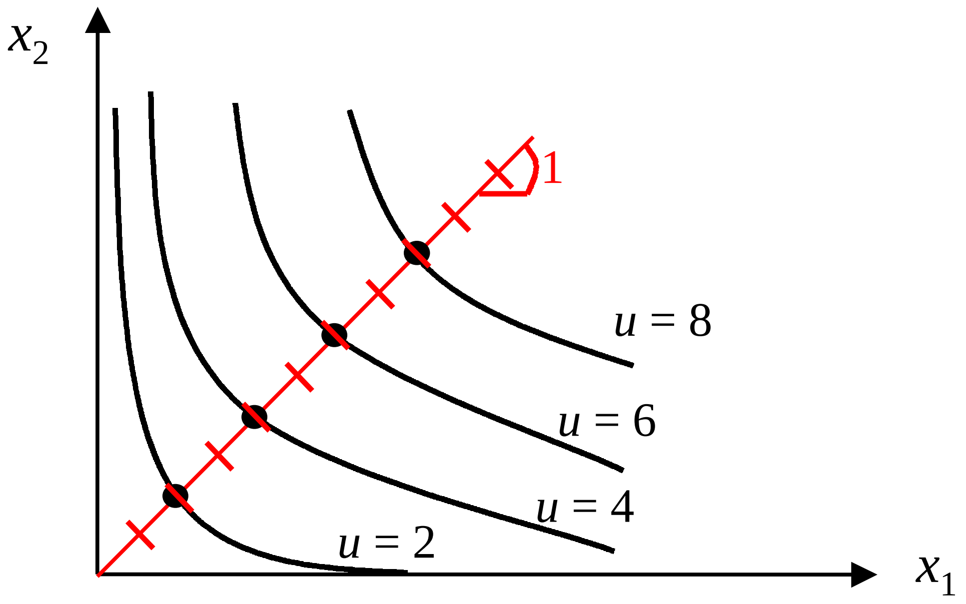
Es ist sinnvoll, eine Präferenzrelation durch eine Funktion darzustellen (z.B., damit man damit rechnen kann).

Eine solche Funktion heißt **Nutzenfunktion**.

Definition: Die Funktion u ist Nutzenfunktion zur (strikten) Präferenzrelation $\succ$, wenn für alle x, y gilt:

$x \succ y$ genau dann, wenn $u(x) > u(y)$.

$\succ$ wird durch u repräsentiert, dargestellt.



Kardinaler Nutzen

- Das Nutzenniveau und Nutzendifferenzen sind von Bedeutung.
- Nutzen kann zwischen verschiedenen Personen verglichen werden.

Ordinaler Nutzen

- Die Nutzenfunktion macht keine Aussagen darüber, um wieviel ein Güterbündel besser ist als ein anderes.
- Das Niveau des Nutzens und Nutzendifferenzen haben keine Bedeutung.
- … genügt, um Entscheidungen zu beschreiben.

Gegeben sei eine positiv monotone Transformation f, (d.h. $f' > 0$). Dann gilt:

Wenn $u(x)$ die Präferenzrelation $\succsim$ darstellt, dann stellt auch $v(x) = f(u(x))$ die Präferenzrelation $\succsim$ dar.

Beispiel: $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$$f(u) = u^2 \Rightarrow v(x_1, x_2) = x_1^{\;2} \cdot x_2^{\;2}$$

$$f(u) = \ln u \Rightarrow v(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$$

Diese drei Nutzenfunktionen repräsentieren alle dieselbe Präferenzrelation.

Grenznutzen

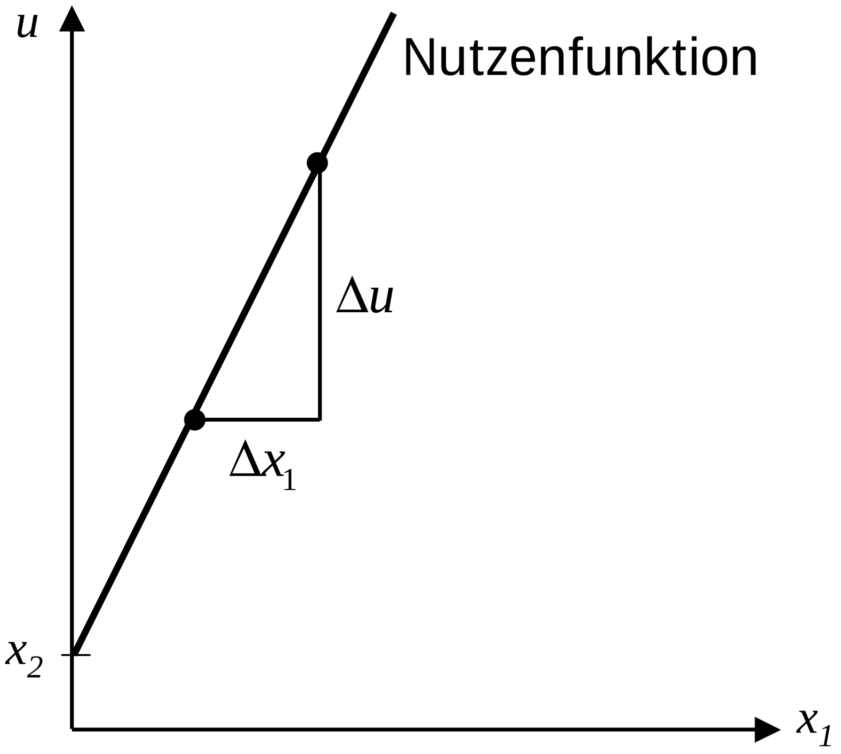
Wie verändert sich der Nutzen, wenn der Haushalt von einem Gut eine zusätzliche Einheit konsumiert?

$\Delta x_1 = 1, \ \ \Delta u = ?$

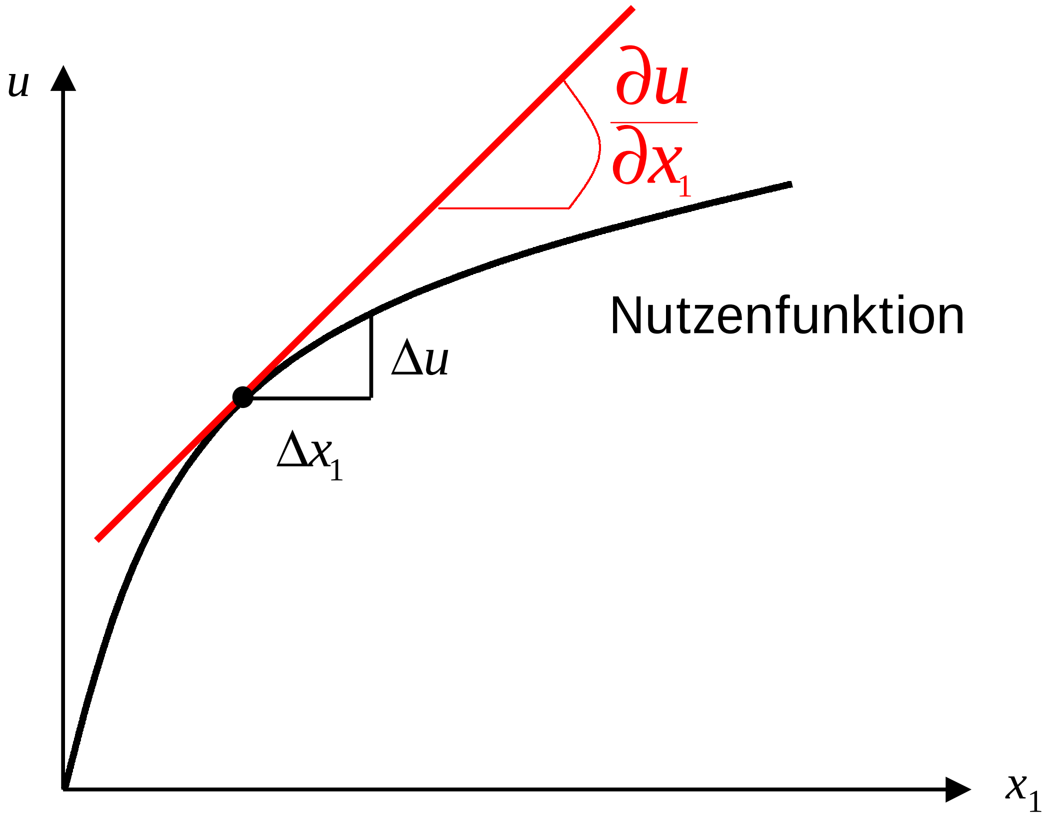
$\dfrac{\Delta u}{\Delta x_1}$ (endlicher) **Grenznutzen des Gutes 1**; er gibt den zusätzlichen Nutzen je Einheit zusätzlichen Konsums des Gutes 1 an.

Beispiel: Vollkommene Substitute $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

x_2 unverändert, $\Delta x_1 = 1 \Rightarrow \Delta u = 2$ also $\dfrac{\Delta u}{\Delta x_1} = 2.$



Grenznutzen bei gekrümmter Nutzenfunktion



Der (infinitesimale) Grenznutzen des Gutes 1:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

gibt den Grenznutzen für sehr kleine Änderungen der konsumierten Menge an.

Analog:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$$

Grenzrate der Substitution

Die Grenzrate der Substitution MRS sagt aus, wieviele zusätzliche Einheiten des Gutes 2 der Haushalt benötigt, um für den Verlust von einer Einheit des Gutes 1 entschädigt zu werden.

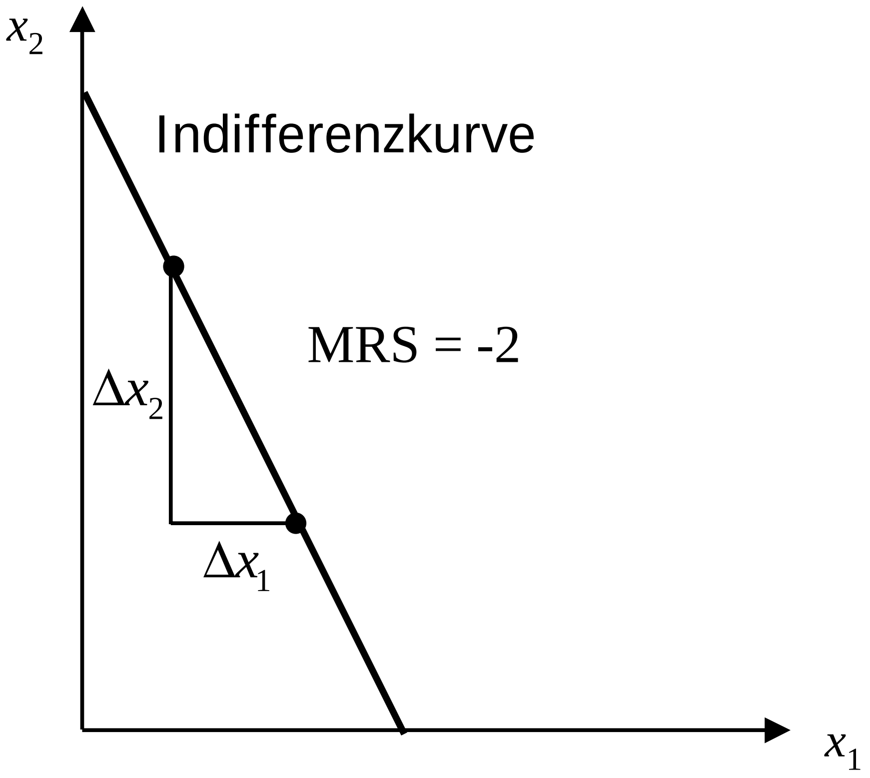
Wieviele Einheiten des Gutes 2 würde der Haushalt hergeben, um eine zusätzliche Einheit des Gutes 1 zu erhalten?

→ Grenzzahlungsbereitschaft für Gut 1, ausgedrückt in Einheiten des Gutes 2.

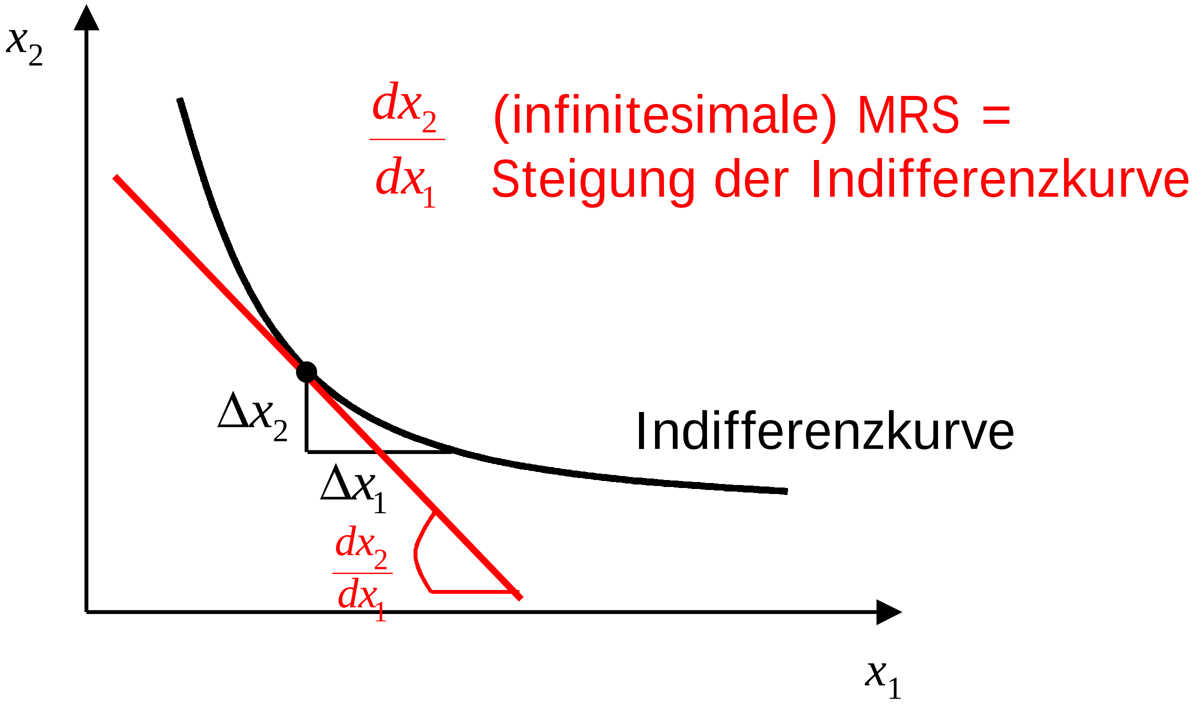
Beispiel: Vollkommene Substitute $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$.
Wenn x_1 um $\Delta x_1 = -1$ sinkt und x_2 um $\Delta x_2 = 2$ steigt, bleibt u unverändert.

Grenzrate der Substitution:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \mathrm{MRS}(x_1, x_2)$$



MRS mit gekrümmter Indifferenzkurve


$\frac{dx_2}{dx_1}$ (infinitesimale) MRS = Steigung der Indifferenzkurve

Berechnung der MRS

dx_1, dx_2 Änderungen der Gütermengen

dy Änderung des Nutzens

Totales Differential der Nutzenfunktion:

$$du = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 .$$

Entlang einer Indifferenzkurve ist $du = 0$, also

$$0 = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

$$\Rightarrow \text{MRS}(x_1, x_2) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u(x_1, x_2) / \partial x_1}{\partial u(x_1, x_2) / \partial x_2}$$

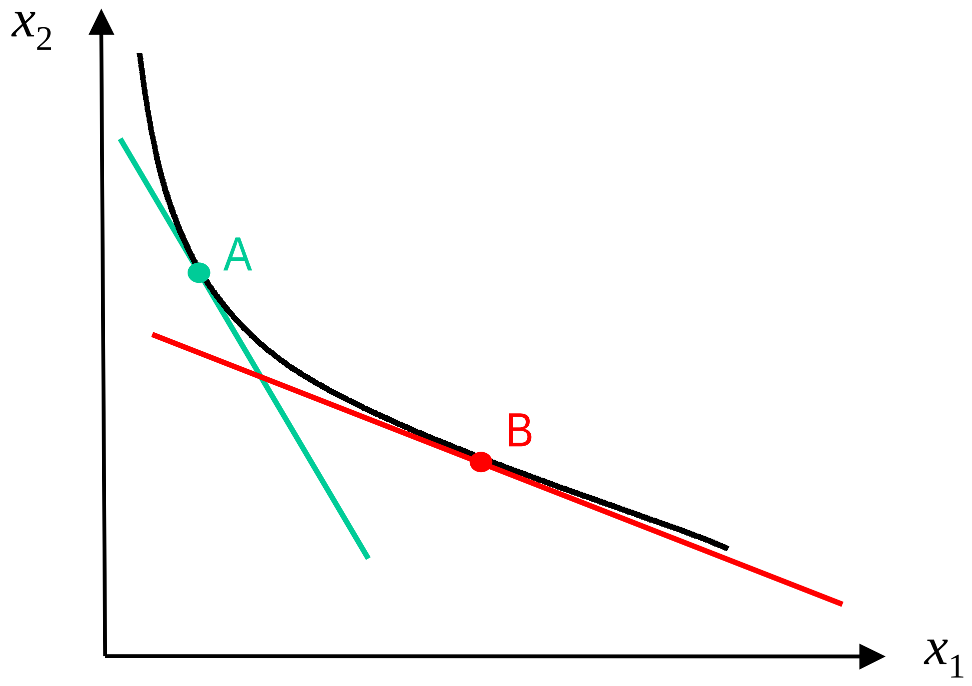
$$\text{MRS} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\text{Grenznutzen des Gutes 1}}{\text{Grenznutzen des Gutes 2}}$$

Fallende Grenzrate der Substitution

- Der Betrag der Grenzrate der Substitution, |MRS|, wird geringer, wenn man bei unverändertem Nutzen mehr von Gut 1 konsumiert.
- Die Indifferenzkurve wird flacher, wenn man sich an ihr entlang nach rechts bewegt.
- Interpretation:

Die Zahlungsbereitschaft für Gut 1 wird geringer, wenn man mehr davon hat.

- Fallende |MRS| ⇔ konvexe Präferenzen



Im Punkt B ist die |MRS| geringer als im Punkt A.

Fallender Grenznutzen

Wenn mehr von Gut 1 konsumiert wird, dann sinkt der Nutzenzuwachs, der durch eine weitere Erhöhung des Konsums dieses Gutes ausgelöst wird.

Fallender Grenznutzen sagt bei ordinaler Nutzenfunktion nichts aus, denn dies hängt nicht nur von der Präferenzrelation ab, sondern auch von der gewählten Form der Nutzenfunktion.

Beispiel:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

Grenznutzen:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4} x_1^{-3/2} x_2^{1/2} < 0$$

Die Nutzenfunktion $v(x_1, x_2) = [u(x_1, x_2)]^4 = x_1^2 x_2^2$ stellt die selbe Präferenzrelation dar.

Grenznutzen:

$$\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 x_2{}^2$$

$$\frac{\partial^2 v(x_1, x_2)}{\partial x_1{}^2} = 2x_2{}^2 > 0$$

Dieselbe Präferenzrelation hätte einmal steigenden, einmal fallenden Grenznutzen.

Fallende |MRS| ist dagegen auch bei ordinaler Nutzenfunktion ein sinnvoller Begriff, denn die MRS ändert sich nicht, wenn die Nutzenfunktion monoton transformiert wird.

Es sei $v(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2))$, mit $f' > 0.$

Dann ist die MRS der Nutzenfunktion *v:*

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_v = -\frac{\partial v / \partial x_1}{\partial v / \partial x_2} = -\frac{f'(u) \cdot \partial u / \partial x_1}{f'(u) \cdot \partial u / \partial x_2} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_u$$

Soziale Präferenzen

- In den meisten Anwendungen (und bis auf diesen Abschnitt überall in Mikroökonomik I) wird angenommen, daß Menschen nur an ihrem eigenen materiellen Wohlergehen interessiert sind.
- Interesse am Wohlergehen anderer Menschen kann jedoch ebenfalls mittels einer Nutzenfunktion abgebildet werden.

Modell

- Die Gesellschaft besteht aus 2 Haushalten A und B.
- Es gibt nur ein Gut („Geld“).
- x_A Konsum = Einkommen des Haushalts A
- x_B Konsum = Einkommen des Haushalts B
- $u_A(x_A,x_B)$ Nutzenfunktion des Haushalts A
- $u_B(x_A,x_B)$ Nutzenfunktion des Haushalts B

Beispiele

$u_A(x_A,x_B) = x_A + ax_B$

Es gilt

$$\frac{\partial u_A(x_A,x_B)}{\partial x_B} = a$$

- Altruismus, Nächstenliebe, wenn $a > 0$
- Schadenfreude, „Nächstenhaß“, wenn $a < 0$

$u_A(x_A,x_B) = x_A - a \max\{x_B-x_A; 0\} - b \max\{x_A-x_B; 0\}$

Hier gilt

$$\frac{\partial u_A(x_A,x_B)}{\partial x_B} = \begin{cases} -a & \text{wenn } x_A < x_B \\ b & \text{wenn } x_A > x_B \end{cases}$$

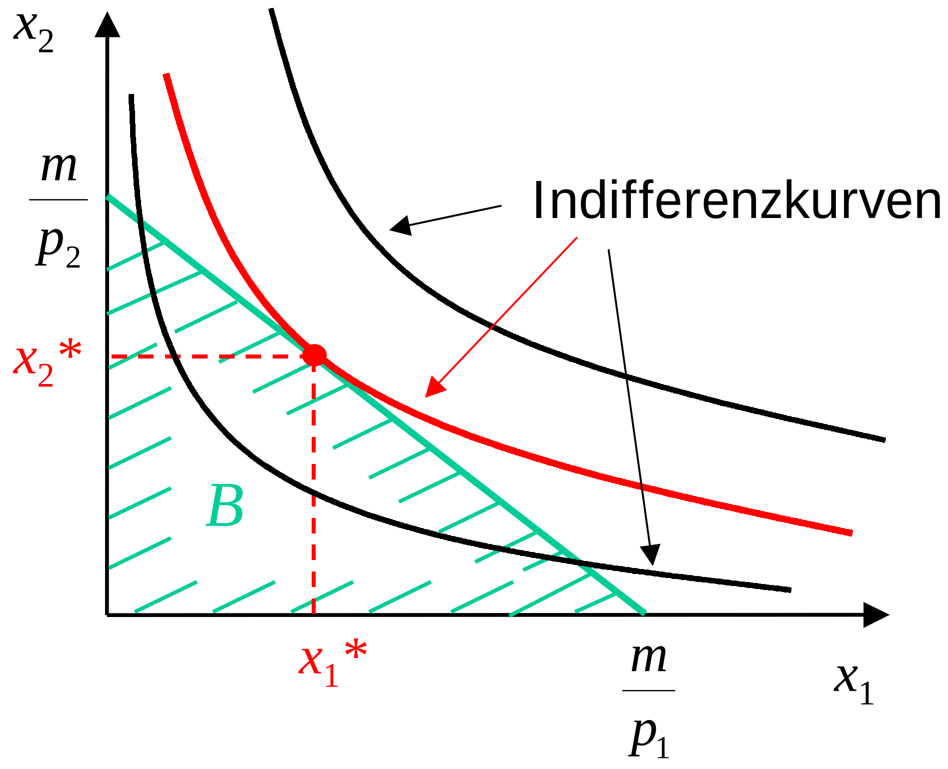
- Mitgefühl, wenn $x_A > x_B$
- Neid, wenn $x_A < x_B$
- Ungleichheitsaversion
- Für Haushalt A ist nicht nur sein eigenes Einkommen, sondern auch seine relative Einkommensposition wichtig.

Zusammenfassung

- Die Präferenzrelation drückt die Wünsche des Konsumenten aus.
- Rationales Verhalten wird durch eine vollständige, reflexive und transitive Präferenzrelation beschrieben.
- Eine Funktion, die bei besseren Güterbündeln höhere Werte annimmt, ist eine Nutzenfunktion.
- Nutzen wird meist ordinal angegeben; dann haben Nutzendifferenzen keine Bedeutung.
- Der Grenznutzen eines Gutes gibt an, wie viel zusätzlichen Nutzen eine weitere Einheit des Konsums dieses Gutes bringt.
- Die Grenzrate der Substitution drückt die Grenzzahlungsbereitschaft für ein Gut in Einheiten des anderen Gutes aus.

4 Nutzenmaximierung und Ausgabenminimierung

Der Haushalt wählt das beste Güterbündel, das er sich leisten kann.



Optimierung: Suche die höchste Indifferenzkurve, die mit der Budgetmenge noch einen Punkt gemeinsam hat.

Eigenschaften des optimalen Güterbündels:

- Es liegt auf der Budgetgeraden. Das Einkommen wird vollständig ausgegeben.
- Budgetgerade und Indifferenzkurve tangieren sich. Es gilt:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \mathrm{MRS} = -\frac{p_1}{p_2}$$

Interpretation:

|MRS| gibt an, wie viele Einheiten des Gutes 2 der Haushalt hergeben will, um eine zusätzliche Einheit des Gutes 1 zu erhalten.

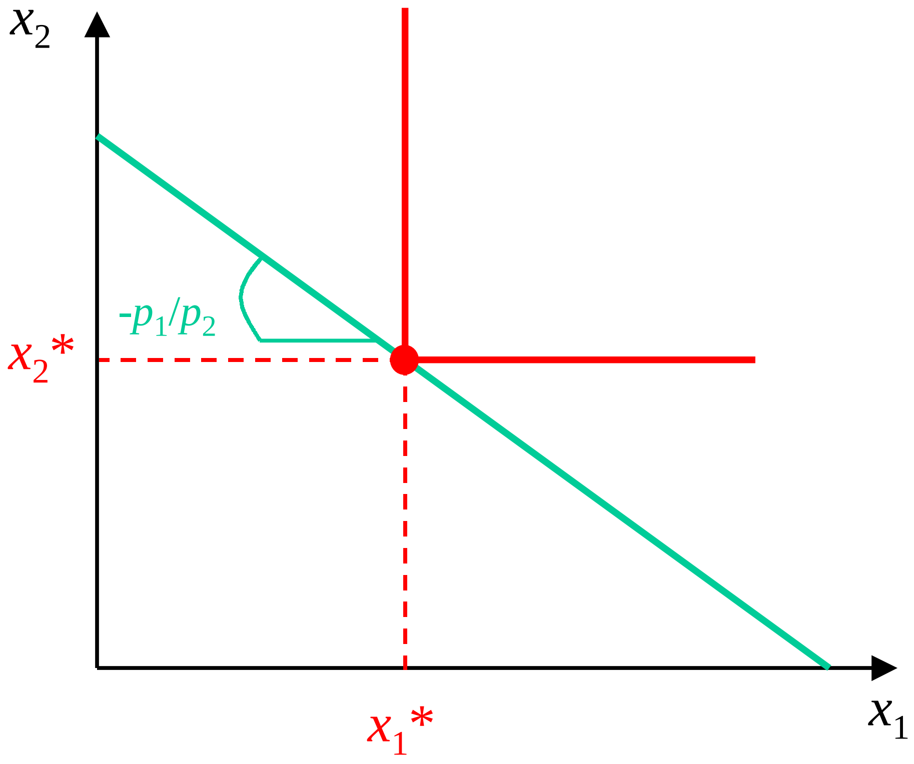
p_1/p_2 gibt an, wie viele Einheiten des Gutes 2 der Haushalt hergeben muß, um eine zusätzliche Einheit des Gutes 1 zu erhalten.

Wenn |MRS|> p_1/p_2 ist, dann lohnt es sich, etwas weniger von Gut 2 zu konsumieren und das eingesparte Geld für Gut 1 zu verwenden.

Probleme mit der Bedingung $\mathrm{MRS} = -\frac{p_1}{p_2}$

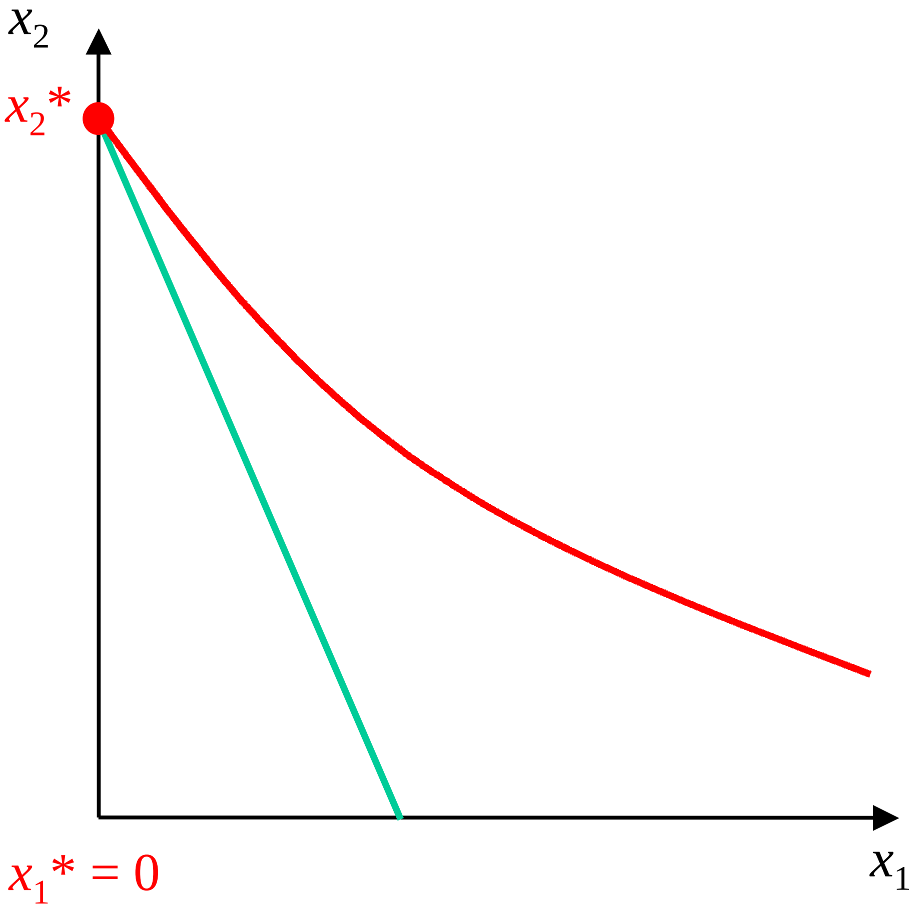
1. Die Nutzenfunktion ist nicht differenzierbar.

z.B. vollkommene Komplemente $u = \min\{x_1; x_2\}$



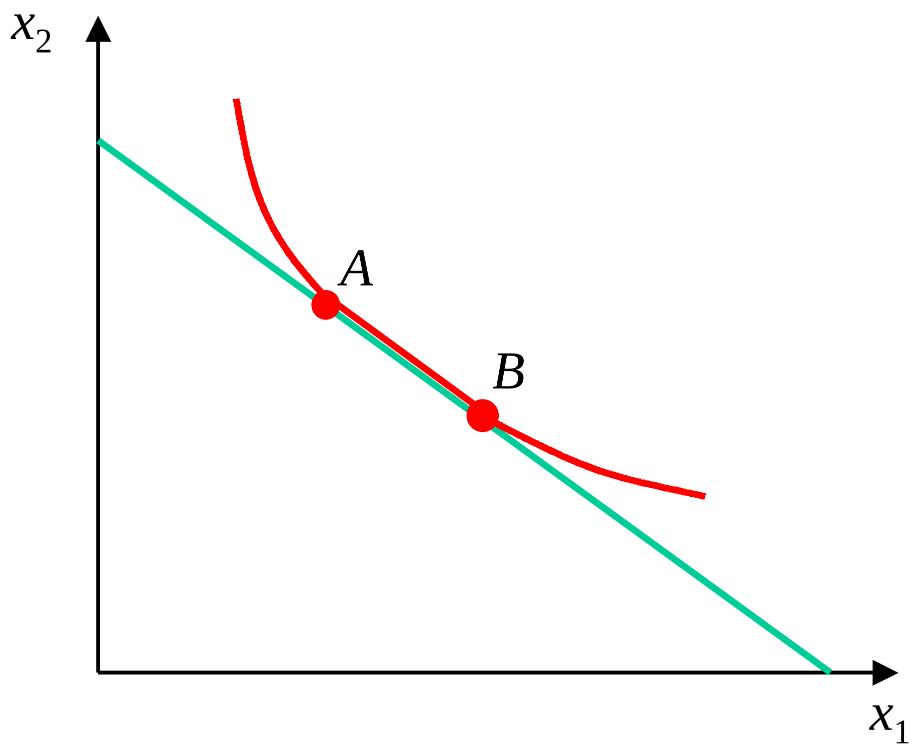
Die Indifferenzkurve ist links von (x_1^*, x_2^*) steiler als die Budgetgerade, rechts davon flacher.

2. Randlösung x_1*=0 oder x_2*=0.



$$|\mathrm{MRS}| = \frac{\partial u(0, x_2*) / \partial x_1}{\partial u(0, x_2*) / \partial x_2} \leq \frac{p_1}{p_2}$$

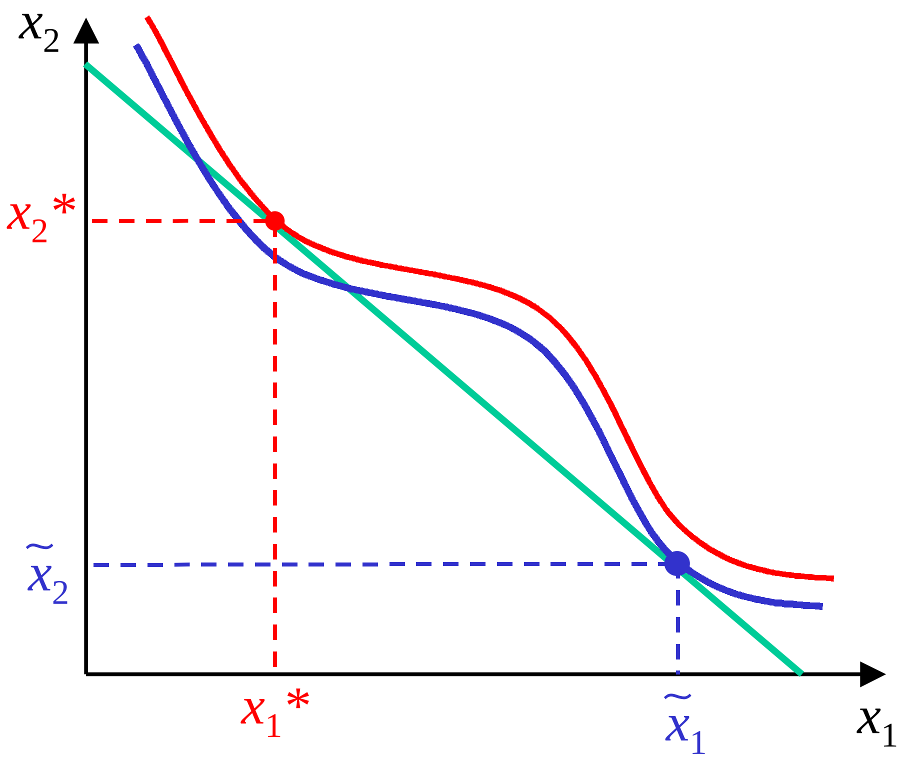
3. Mehrere nutzenmaximierende Güterbündel



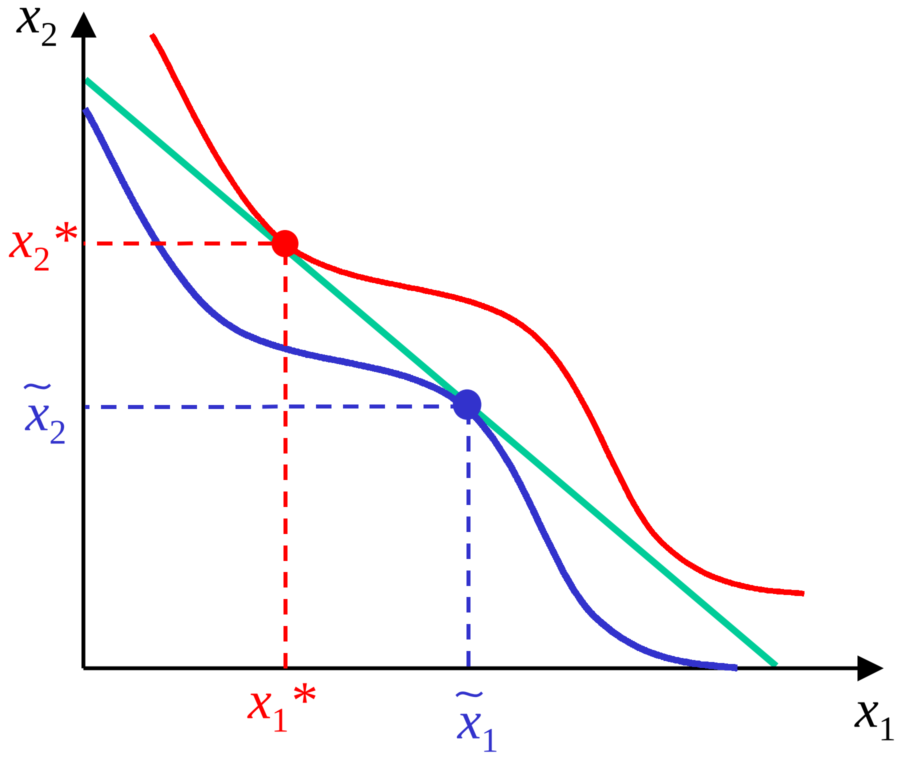
Alle Güterbündel zwischen *A* und *B* sind gleich gut und maximieren den Nutzen unter Einhaltung der Budgetbeschränkung.

Alle diese Punkte erfüllen $\mathrm{MRS} = -p_1/p_2$.

4. Lokales, aber kein globales Nutzenmaximum



5. Nutzenminimum



Hinreichende Bedingungen

Die Präferenzrelation ist konvex und monoton, und das Güterbündel (x_1,x_2) erfüllt $\mathrm{MRS} = - p_1/\mathrm{p}_2$ und $p_1\, x_1 + p_2\, x_2 = m$

$\Rightarrow$

(x_1,x_2) maximiert den Nutzen unter der Budgetbeschränkung.

Notwendige Bedingungen

(x_1,x_2) maximiert den Nutzen unter der Budgetbeschränkung; u ist differenzierbar; die Präferenzen sind monoton und es gilt $x_1 > 0, x_2 > 0$

$\Rightarrow$

(x_1,x_2) erfüllt $\mathrm{MRS} = - p_1/\mathrm{p}_2$ und $p_1\, x_1 + p_2\, x_2 = m.$

Analytische Lösung

$\max_{(x_1, x_2)} \; u(x_1, x_2)$ **Zielfunktion**

u.d.B. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ **Nebenbedingung**

Lösungen:

$$x_1{*} = x_1(p_1, p_2, m)$$

(Marshallsche) Nachfragefunktion nach Gut 1

$$x_2{*} = x_2(p_1, p_2, m)$$

(Marshallsche) Nachfragefunktion nach Gut 2

Einsetzen der Marshallschen Nachfrage-funktionen in die Nutzenfunktion liefert die

Indirekte Nutzenfunktion

$$v(p_1, p_2, m) = u(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m))$$

Die Marshallschen Nachfragefunktionen und die indirekte Nutzenfunktion

- sind Ergebnis des optimierenden Verhaltens des Haushalts.
- hängen von den Preisen und dem Einkommen ab.

Optimierung unter Nebenbedingungen

→ **Lagrangefunktion**

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

λ ist die **Lagrangevariable.** Durch den Term $-\lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$ wird eine Verletzungen der Nebenbedingung “bestraft”.

Eine Lösung erfüllt

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \qquad (2)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\lambda = \frac{\partial u / \partial x_1}{p_1} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\partial u / \partial x_2}{p_2}$$

Durch Gleichsetzen lässt sich λ eliminieren. Es folgt

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{also} \qquad |\,\mathrm{MRS}\,| = \frac{p_1}{p_2}$$

Interpretation der Lagrangevariablen

Für alle p_1, p_2 und m gilt:

$$v(p_1, p_2, m) = u\left(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m)\right)$$

Differenzieren nach m liefert :

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2(p_1, p_2, m)}{\partial m} \quad (4)$$

Zudem gilt die Budgetbeschränkung (3) für alle p_1, p_2 und m:

$$p_1 x_1(p_1, p_2, m) + p_2 x_2(p_1, p_2, m) = m$$

Differenzieren nach m liefert :

$$p_1 \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2(p_1, p_2, m)}{\partial m} = 1 \qquad (5)$$

Ersetze in (4) $\partial u / \partial x_1$ und $\partial u / \partial x_2$ gemäß den Bedingungen (1) und (2) durch $\partial u / \partial x_1 = \lambda p_1$ bzw. $\partial u / \partial x_2 = \lambda p_2$. Es folgt:

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \lambda \left[p_1 \frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2(p_1, p_2, m)}{\partial m} \right] \quad (6)$$

Mit (5) folgt aus (6):

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \lambda$$

λ ist der **Grenznutzen des Einkommens.**

Die Lagrangevariable gibt an, um wieviel der maximal erreichbare Nutzen steigt, wenn eine zusätzliche Geldeinheit an Einkommen zur Verfügung steht.

Allgemein:
Die Lagrangevariable gibt an, um wieviel sich der optimale Wert der Zielfunktion verbessert, wenn die Nebenbedingung um eine Einheit gelockert wird.

Ausgabenminimierung

Wie viel muß der Haushalt bei gegebenen Preisen (p_1,p_2) mindestens ausgeben, um ein **vorgegebenes Nutzenniveau** u zu erreichen?

$$\min_{(x_1,x_2)} \; p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\text{u.d.B. } u(x_1,x_2) = u$$

Lösungen:

$$x_1{*} = h_1(p_1, p_2, u)$$

(Hickssche) Nachfragefunktion nach Gut 1

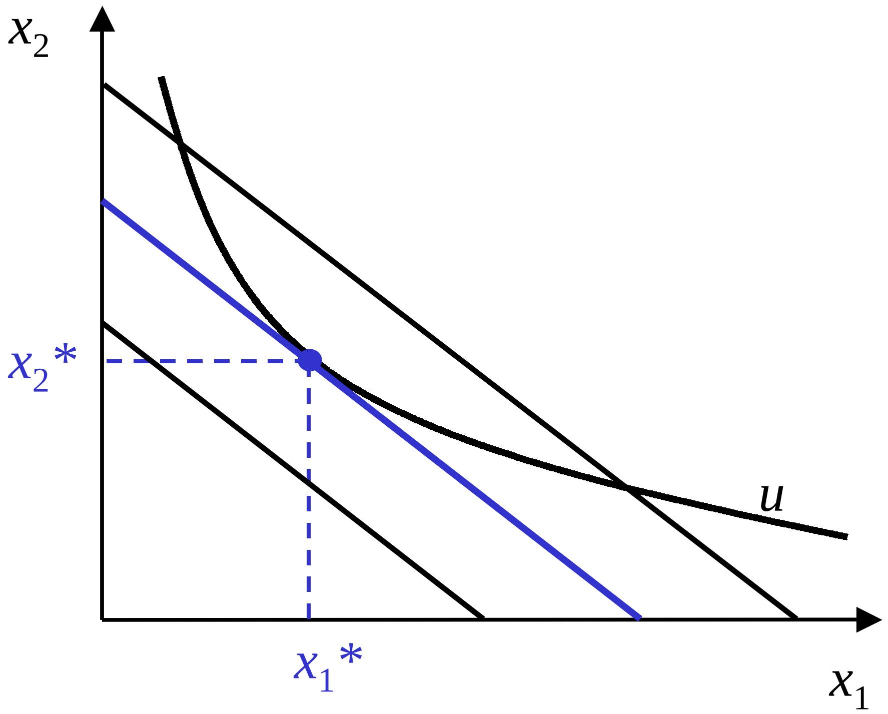
$$x_2{*} = h_2(p_1, p_2, u)$$

(Hickssche) Nachfragefunktion nach Gut 2

$$e(p_1, p_2, u) = p_1h_1(p_1, p_2, u) + p_2h_2(p_1, p_2, u)$$

Ausgabenfunktion

Die Hicksschen Nachfragefunktionen und die Ausgabenfunktion hängen von den Preisen und dem Nutzen ab.



Optimierung: Suche die niedrigste Budgetgerade, die mit der Indifferenzkurve zu u noch einen Punkt gemeinsam hat.

Die Hickssche Nachfragefunktion heißt auch **kompensierte Nachfragefunktion**.

Sie gibt an, wie sich die Nachfrage in Abhängigkeit von den Preisen verhält, wenn das Einkommen so angepaßt wird, daß der Nutzen konstant bleibt.

Shephards Lemma

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = h_1(p_1, p_2, u)$$

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_2} = h_2(p_1, p_2, u)$$

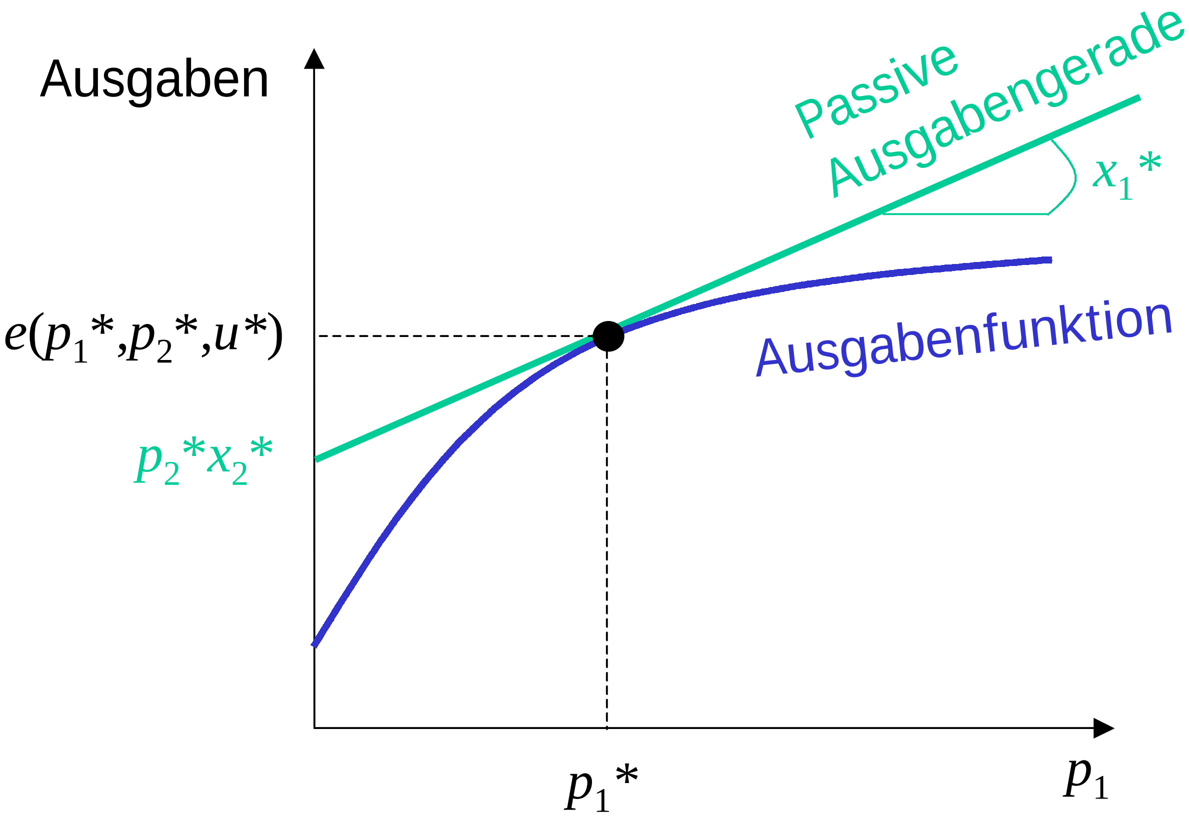
Begründung:

Es sei (x_1*, x_2*) dasjenige Güterbündel, mit dem bei den Preisen p_1*, p_2* der Nutzen $u*$ mit den geringsten Ausgaben erreicht wird. Die **Passive Ausgabengerade**

$$e = p_1 x_1^* + p_2^* x_2^*$$

drückt aus, wie die Ausgaben auf eine Änderung des Preises p_1 reagieren würden, wenn der Haushalt seine Entscheidung **nicht** an die veränderten Preise **anpassen** würde.

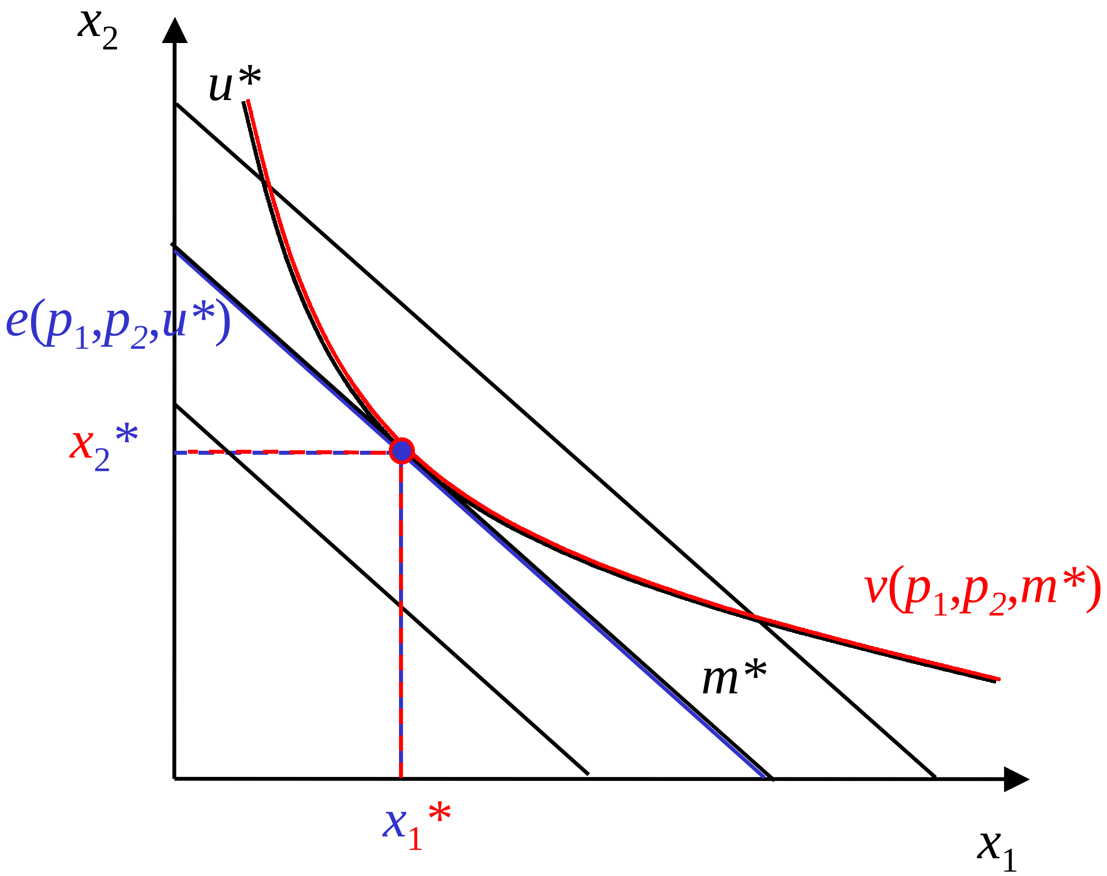
Die durch die Ausgabenfunktion $e\left(p_1, p_2^*, u^*\right)$ ausgedrückten **optimalen** Ausgaben sind höchstens so groß.



Ausgabenfunktion und passive Ausgabengerade haben die gleiche Steigung.

Dualität

Der Zusammenhang zwischen
Ausgabenminimierung und Nutzenmaximierung



$(x_1{}^*, x_2{}^*)$ maximiert den Nutzen beim Einkommen m^*.

$u^* = v(p_1,p_2,m^*)$ ist der maximale Nutzen zu m^*.

$(x_1{}^*, x_2{}^*)$ minimiert die Ausgaben, wenn der Nutzen u^* erreicht werden soll.

$m^* = e(p_1,p_2,u^*)$ sind die minimalen Ausgaben, mit denen u^* erreicht werden kann.

Identitäten

Für alle p_1, p_2, m, u gilt:

(1) $e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, m)) = m$

(2) $v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u$

(3) $x_i(p_1, p_2, m) = h_i(p_1, p_2, v(p_1, p_2, m))$

(4) $h_i(p_1, p_2, u) = x_i(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$

Roys Identität

Für $i = 1,2$ gilt

$$x_i(p_1, p_2, m) = -\frac{\dfrac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial m}}$$

Beweis:

Differenzieren der Identität (2) nach p_1 liefert mit Identität (1):

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} + \frac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial m} \underbrace{\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1}}_{h_1(p_1, p_2, u)} = 0$$

Wegen der Identität (4) folgt:

$$h_1(p_1, p_2, u) = x_1(p_1, p_2, m) = -\frac{\dfrac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial v(p_1, p_2, m)}{\partial m}}$$

Zusammenfassung

- An einem nutzenmaximierenden Güterbündel ist die Grenzrate der Substitution gleich dem negativen Preisverhältnis.
- Bei Nutzenmaximierung wird das Einkommen vollständig ausgegeben.
- Die **Marshallschen Nachfragefunktionen** geben das nutzenmaximierende Güterbündel in Abhängigkeit von den Preisen und dem Einkommen an.
- Die **Hicksche (kompensierte) Nachfrage** beschreibt das Güterbündel, mit dem ein vorgegebenes Nutzenniveau mit den geringsten Ausgaben erzielt werden kann.

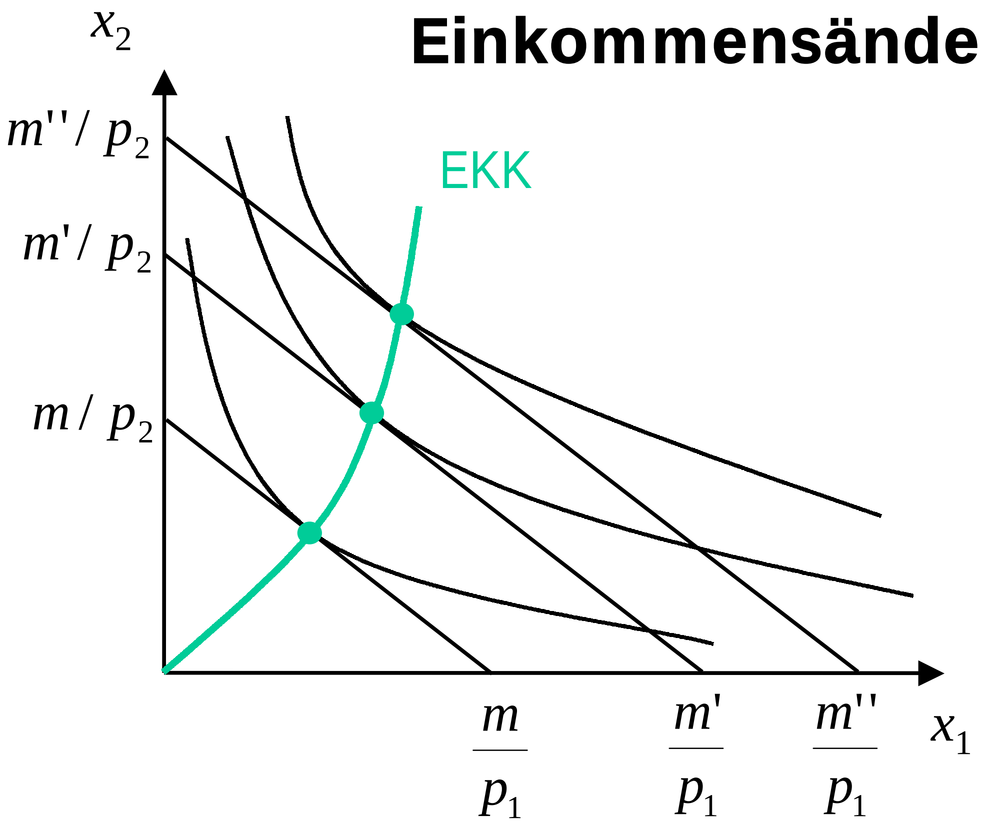
5 Einkommens- und Preisänderungen

Komparative Statik:

Wie ändern sich die optimalen Entscheidungen, wenn sich exogene Größen ändern?

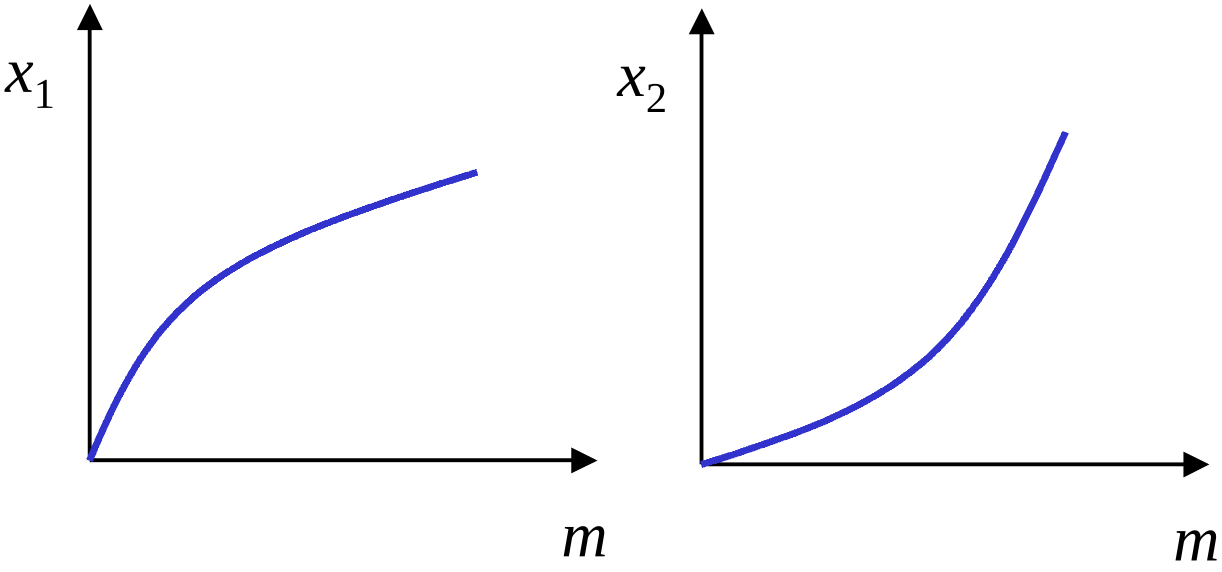
Hier:
Wie ändern sich die Marshallschen Nachfragen, wenn die Preise oder das Einkommen sich ändern?

Einkommensänderungen



Die **Einkommenskonsumkurve** (EKK) enthält alle Konsumbündel, die bei unveränderten Preisen für irgendein Einkommen nutzenmaximierend sind.

Die **Engelkurve** stellt den Konsum eines Gutes in Abhängigkeit vom Einkommen dar.



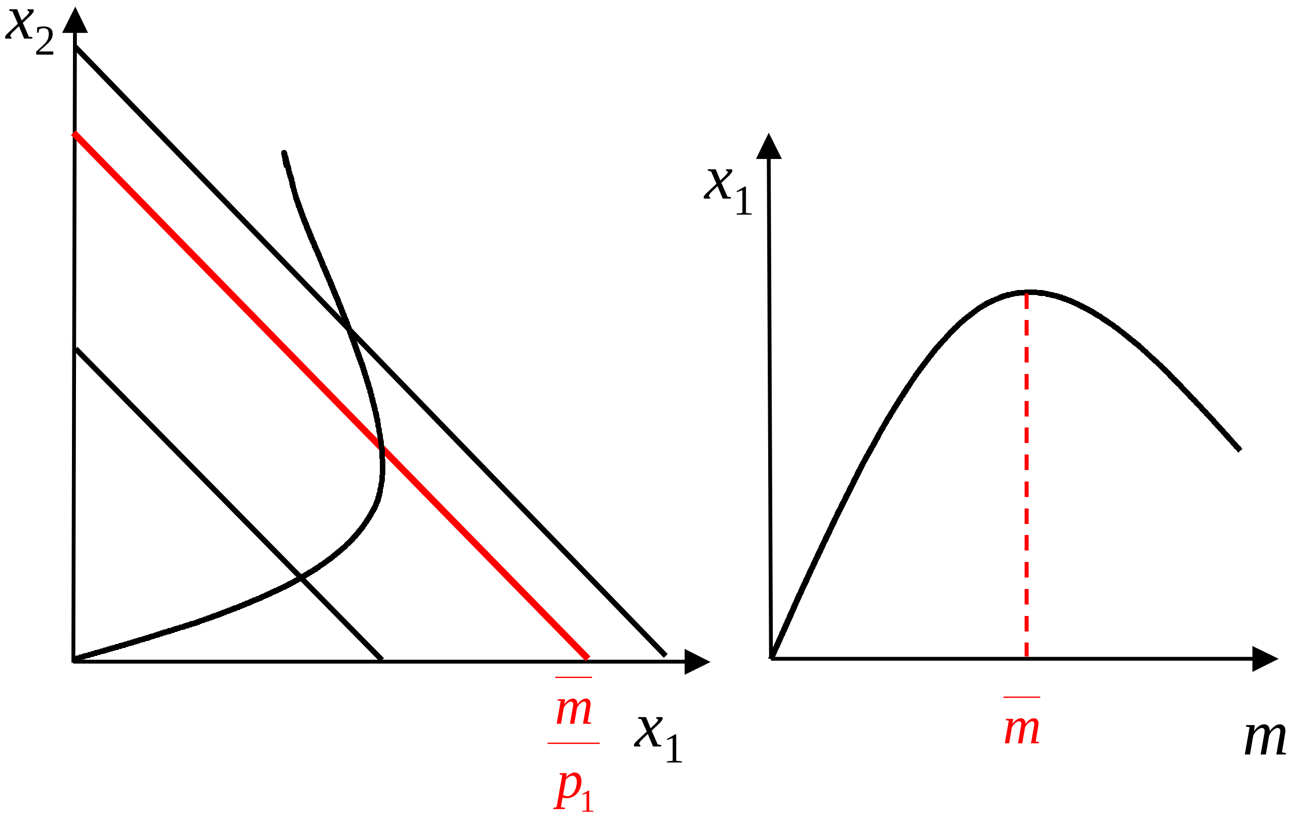
Definition:

$$\varepsilon_{x_i,m} = \frac{\partial x_i}{\partial m}\cdot\frac{m}{x_i}$$

Einkommenselastizität der Nachfrage nach Gut i.

Um wie viel % verändert sich die Nachfrage nach Gut i, wenn das Einkommen um 1% steigt?

$\varepsilon_{x_i,m} > 1$	Luxusgut	**Normales Gut**
$0 < \varepsilon_{x_i,m} < 1$	Notwendiges Gut	
$\varepsilon_{x_i,m} < 0$	**Inferiores Gut**	



Definition:

Gut 1 ist für Einkommen $m > \overline{m}$ inferior.

Beispiel:

Quasilineare Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = w(x_1) + x_2;\ \ w' > 0, w'' < 0$$

Falls $x_1,\ x_2 > 0,$ dann gilt für die optimale Entscheidung:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$w'(x_1) = \frac{p_1}{p_2}$$

Diese Bedingung hängt nicht von x_2 ab. Die Lösung dieser Gleichung sei $\overline{x_1}$.

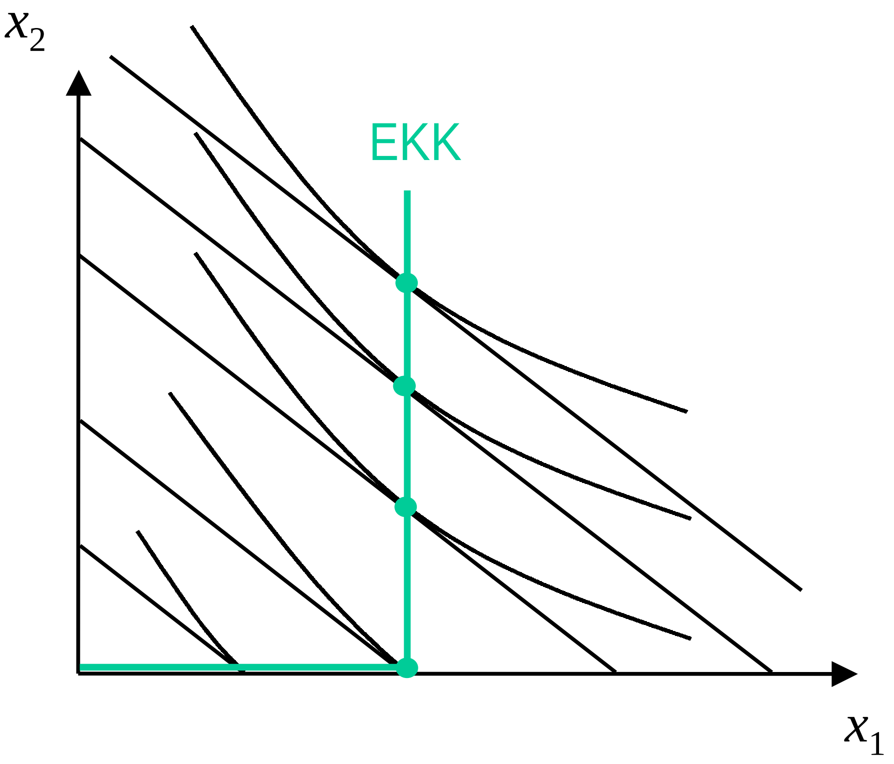
x_2 ergibt sich aus der Budgetbeschränkung:

$$x_2 = \frac{m - p_1 \overline{x_1}}{p_2}$$

Falls das positiv ist, ist die optimale Nachfrage

$$x_1{}^* = \overline{x_1},\quad x_2{}^* = \frac{m - p_1 \overline{x_1}}{p_2}$$

Sonst gilt: $x_1{}^* = \dfrac{m}{p_1},\ x_2{}^* = 0.$



Falls $m > p_1 \overline{x_1}$

dann $\frac{\partial x_1}{\partial m} = 0, \; \frac{\partial x_2}{\partial m} = \frac{1}{p_2}$

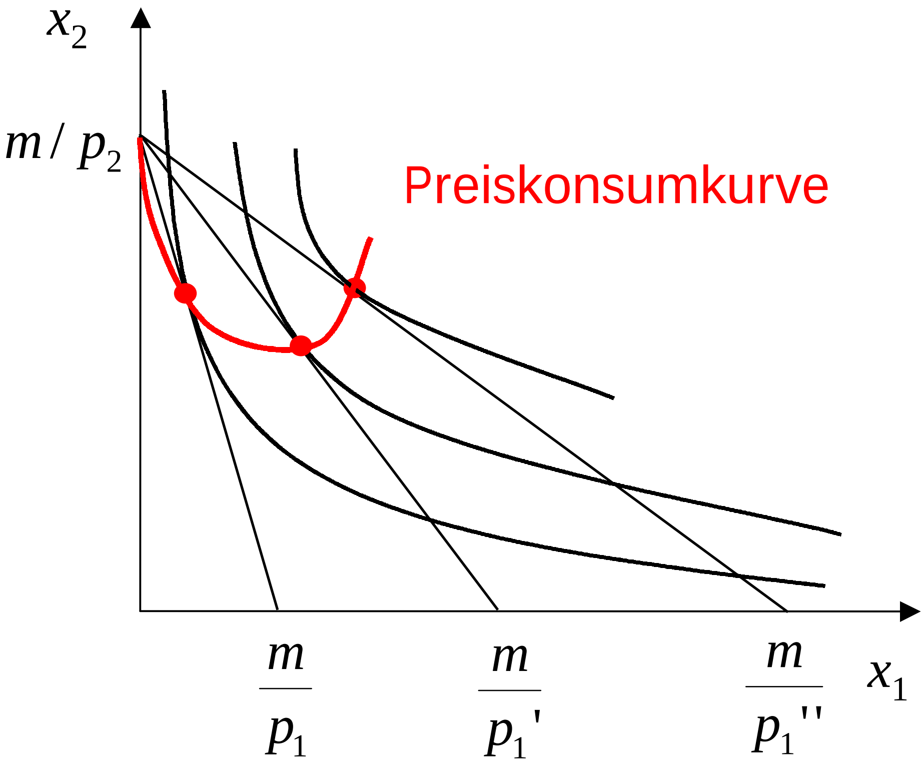
Falls $m < p_1 \overline{x_1}$

dann $\frac{\partial x_1}{\partial m} = \frac{1}{p_1}, \; \frac{\partial x_2}{\partial m} = 0$

Preisänderungen

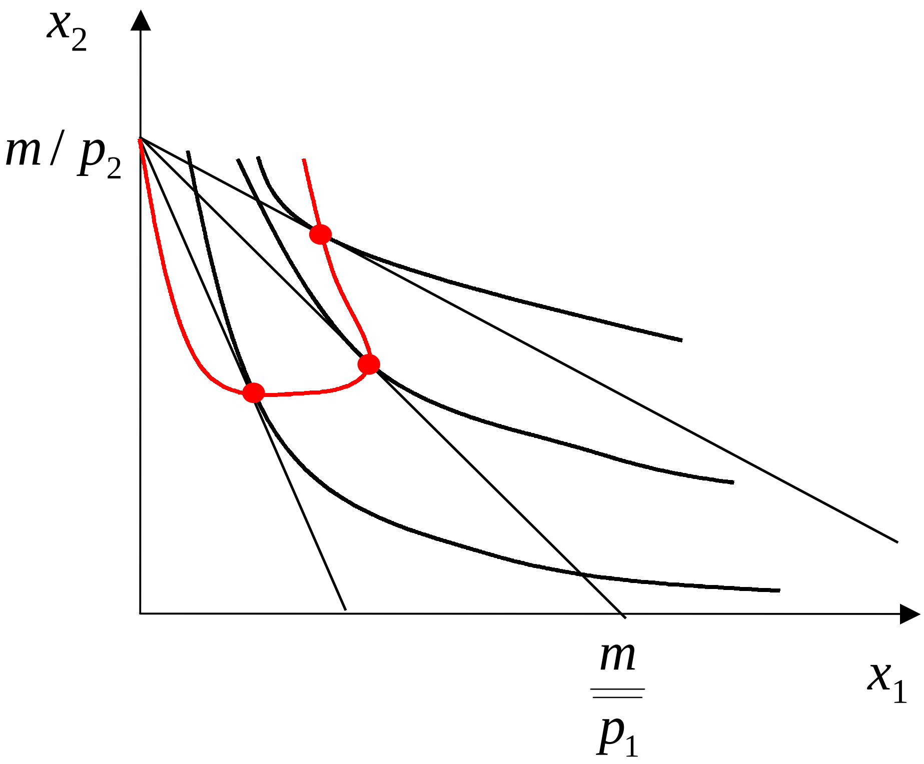
Der Preis p_1 fällt, p_2 und das Einkommen m bleiben konstant.

$$p_1 > p_1' > p_1''$$



Die Preiskonsumkurve enthält alle Konsumbündel, die bei gegebenem Preis p_2 und Einkommen m zu irgendeinem Preis p_1 nutzenmaximierend sind.

Giffen-Gut



Für $p_1 < \overline{p}_1$ nimmt die Nachfrage nach Gut 1 ab, wenn der Preis dieses Gutes sinkt.

Definition:

Gut i ist ein Giffen-Gut (für p_1, p_2, m), wenn gilt:

$$\frac{\partial x_i(p_1, p_2, m)}{\partial p_i} > 0.$$

(Direkte) **Preiselastizität** der Nachfrage nach Gut 1:

$$\varepsilon_{x_1,p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1}$$

Um wie viel % ändert sich die Nachfrage nach Gut 1, wenn der Preis des Gutes 1 um 1% steigt?

Kreuzpreiselastizität der Nachfrage nach Gut 1:

$$\varepsilon_{x_1,p_2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_1}$$

Um wie viel % ändert sich die Nachfrage nach Gut 1, wenn der Preis des Gutes 2 um 1% steigt?

Bei einem Giffen-Gut ist die direkte Preiselastizität positiv.

Einkommens- und Substitutionseffekt

Eine Preiserhöhung hat zwei Effekte:

1. Das betreffende Gut verteuert sich relativ zu anderen Gütern.
   → **Substitutionseffekt**
2. Die Kaufkraft des Haushalts sinkt.
   → **Einkommenseffekt**

Die beiden Effekte können analytisch getrennt werden mit Hilfe der **Slutzky-Gleichung.**

Slutzky-Gleichung

Für $i, j = 1,2$ gilt:

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j}{\partial p_i} - x_i \frac{\partial x_j}{\partial m}$$

Gesamter Preiseffekt = Substitutionseffekt + Einkommenseffekt

GE	=	SE	+	EE
Änderung der Marshall-Nachfrage nach Gut j auf Grund einer Erhöhung des Preises p_i		Änderung der Hicks-Nachfrage nach Gut j auf Grund einer Erhöhung des Preises p_i (dh für unveränderten Nutzen)		Änderung der Marshall-Nachfrage nach Gut j auf Grund des Kaufkraftverlustes, der durch eine Erhöhung des Preises p_i entsteht.

Beweis der Slutzky-Gleichung

Es gilt für alle Preise p_i (Identität 4 der Dualitäts-Beziehungen, Kapitel 4):

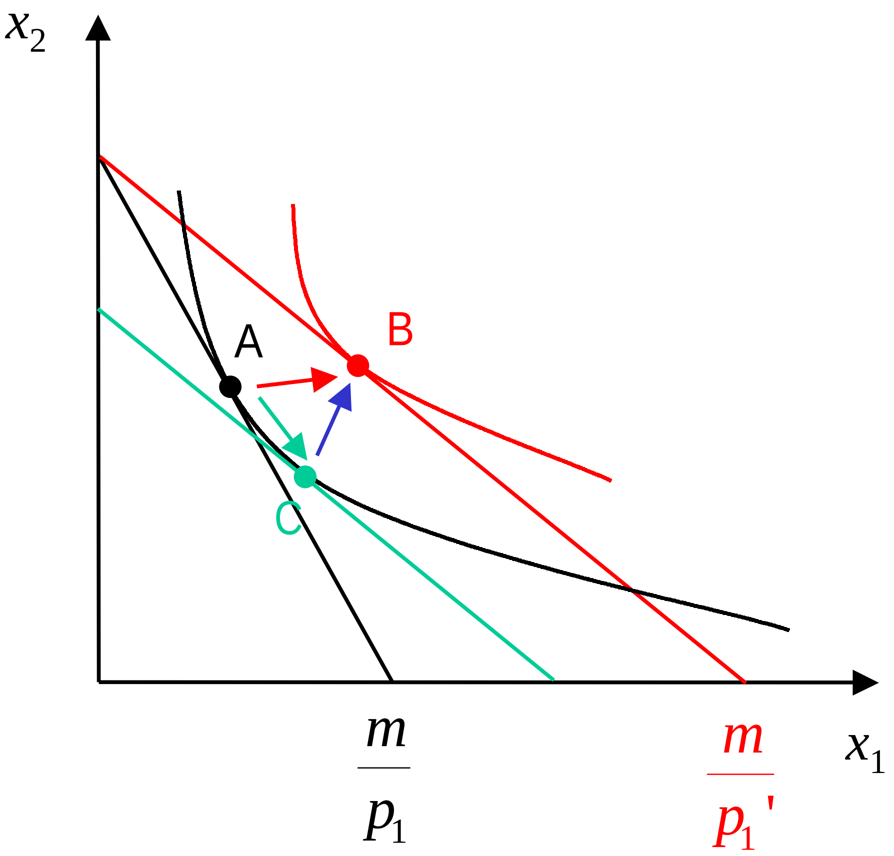
$$h_j(p_1, p_2, u) = x_j(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

Ableiten dieser Gleichung nach p_i liefert, bei Verwendung von $m = e(p_1, p_2, u)$:

$$\frac{\partial h_j(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p_1, p_2, m)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p_1, p_2, m)}{\partial m} \underbrace{\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_i}}_{\substack{h_i(p_1, p_2, u) \\ = x_i}}$$

Auflösen der Gleichung nach $\partial x_j(p_1, p_2, m)/\partial p_i$ führt auf die Slutzky-Gleichung.

Graphische Zerlegung des Preiseffekts (nach Hicks)



Gut 1 wird billiger:

Der Preis sinkt von p_1 auf $p_1´$.

→ Die Preissenkung führt zu einer Veränderung der Nachfrage von A nach B: Gesamteffekt.

→ Der Substitutionseffekt gibt an, wie sich die Nachfrage verändert, wenn sich der Preis ändert, aber das Einkommen gleichzeitig so angepaßt wird, daß der Haushalt den ursprünglichen Nutzen wieder erreicht:
Bewegung von A nach C.

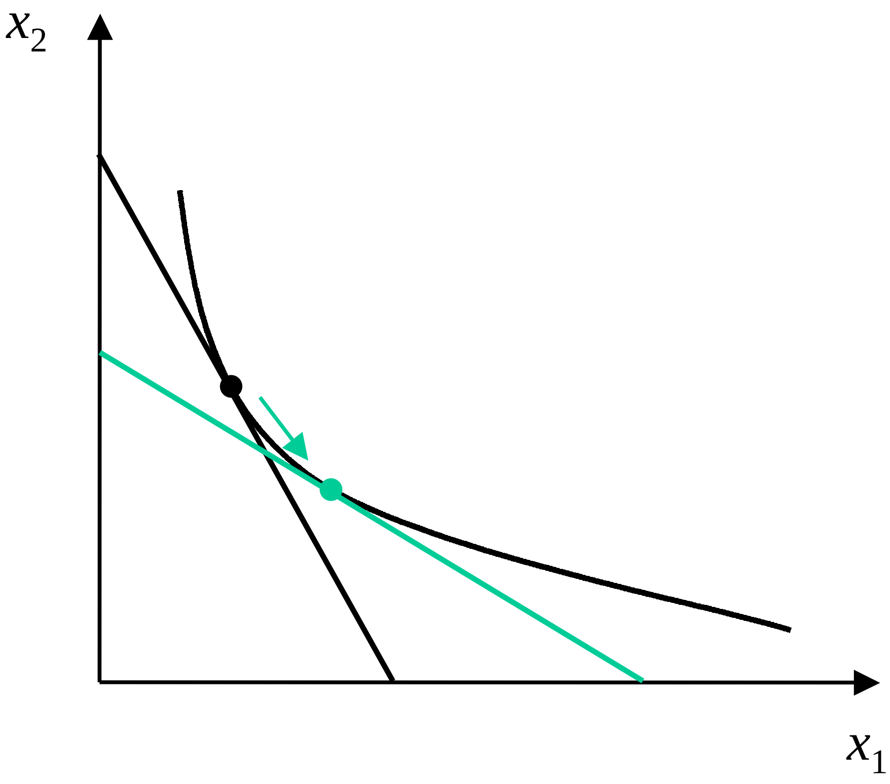
→ Der Einkommenseffekt gibt an, wie sich die Nachfrage bei unverändertem Preisverhältnis, alleine auf Grund des Kaufkraftzuwachses, verändert:
Bewegung von C nach B.

Komparative Statik der Hicksschen Nachfragefunktion

Der direkte Substitutionseffekt ist nicht positiv:

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_i} \leq 0$$

Begründung für 2 Güter:



Slutzky-Zerlegung und Giffen-Gut

Slutzky-Gleichung für den eigenen Preiseffekt

$(i = j)$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_i}}_{\leq 0} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

Wenn $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} > 0$ ist (Definition Giffen-Gut),

dann muß $-x_i \frac{\partial x_i}{\partial m} > 0$ sein, also $\frac{\partial x_i}{\partial m} < 0.$

Folgerung:

Jedes Giffen-Gut ist inferior.

Aber:

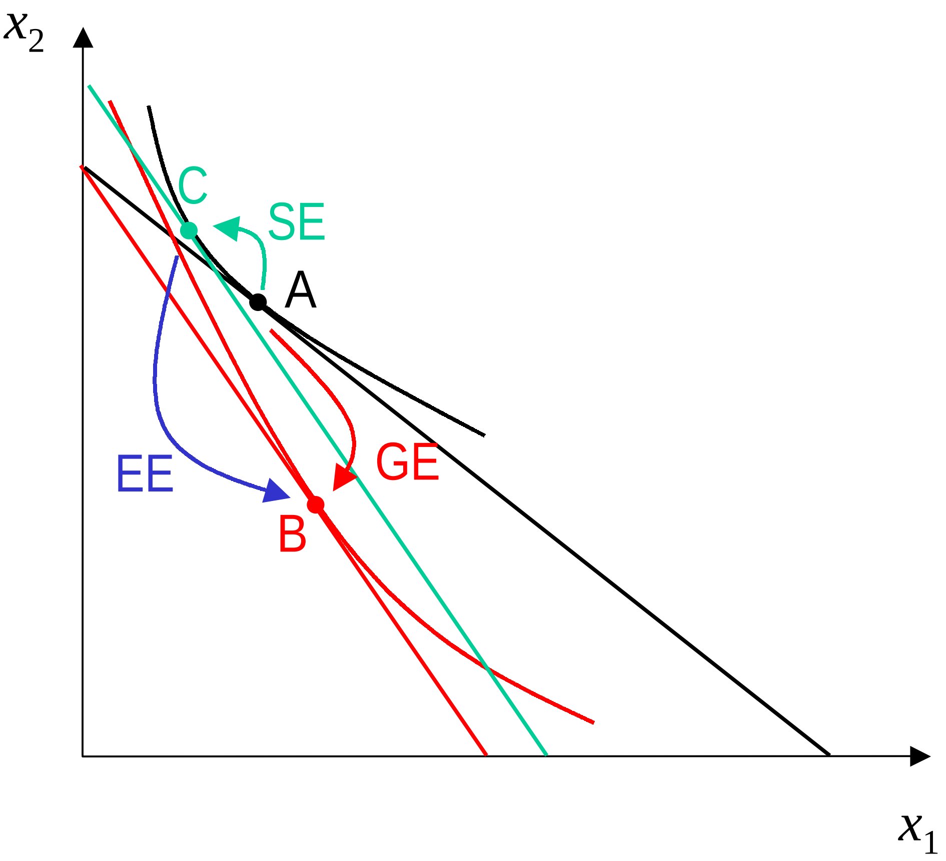
Nicht jedes inferiore Gut ist ein Giffen-Gut.

Die Nachfrage nach Gut i steigt nach einer Erhöhung von p_i, falls i inferior ist **und** der Einkommenseffekt stark genug ist, um den Substitutionseffekt zu überwiegen.

p_i ↑

<table>
<tr><th>SE</th><th colspan="2">EE</th><th>Gesamteffekt</th></tr>
<tr><td rowspan="3">x_i ↓</td><td colspan="2">i normal: x_i ↓</td><td rowspan="2">x_i ↓
Gut i ist „typisch“, „gewöhnlich“</td></tr>
<tr><td rowspan="2">i inferior:
x_i ↑</td><td>SE überwiegt</td></tr>
<tr><td>EE überwiegt</td><td>x_i ↑
Giffen-Gut</td></tr>
</table>

Substitutions- und Einkommenseffekt bei einem Giffen-Gut (graphisch)



p_1 steigt ⇒

Gesamteffekt GE: von A nach B, x_1 steigt,

Substitutionseffekt SE: von A nach C, x_1 sinkt,

Einkommenseffekt EE: von C nach B, x_1 steigt.

Graphische Zerlegung des Preiseffekts (nach Slutzky)

Alternative Definition des Substitutionseffekts:

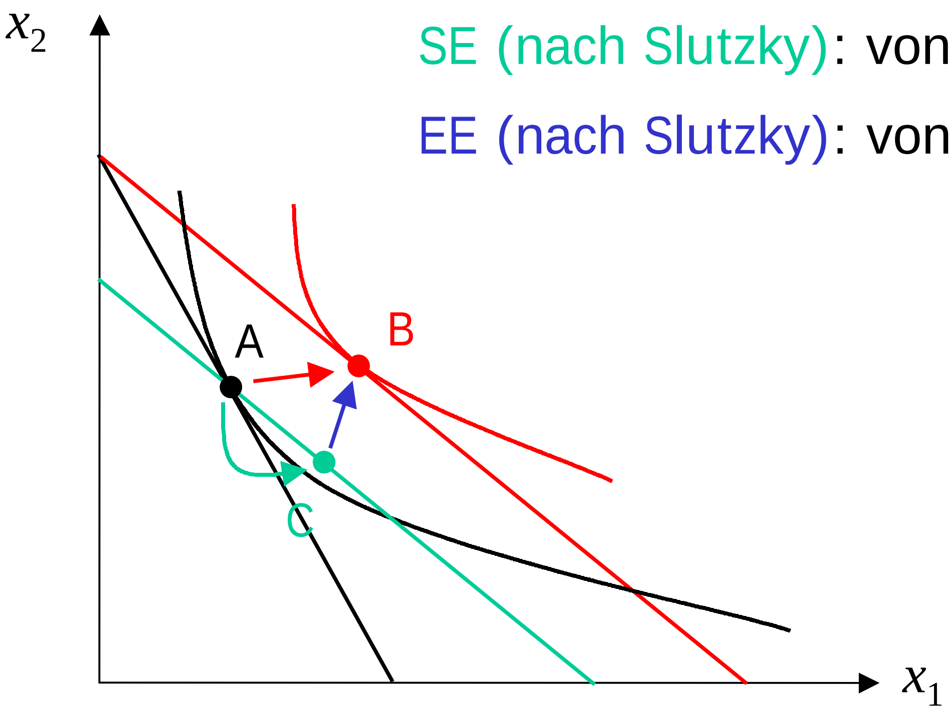
Welche Nachfrageänderung tritt ein, wenn das Einkommen so angepaßt wird, daß das alte **Konsumbündel** trotz der Preisänderung bezahlbar bleibt?

p_1 fällt.

GE: von A nach B

SE (nach Slutzky): von A nach C

EE (nach Slutzky): von C nach B



Zusammenfassung

- Die **Einkommenskonsumkurve** beschreibt die nutzenmaximierenden Güterbündel, die sich bei gegebenem Relativpreis ergeben, wenn das Einkommen variiert.
- Die Nachfrage nach einem **inferioren Gut** sinkt, wenn der Haushalt wohlhabender wird.
- Die **Preiskonsumkurve** beschreibt die nutzenmaximierenden Güterbündel, die sich bei gegebenem Einkommen ergeben, wenn ein Preis sich verändert.
- Die Nachfrage nach einem **Giffen-Gut** steigt, wenn es teurer wird.
- Eine Preiserhöhung verändert die Nachfrage durch den **Substitutionseffekt** und durch den **Einkommenseffekt**.
- Der eigene Substitutionseffekt ist negativ.
- Ein Giffen-Gut ist ein inferiores Gut, dessen Einkommenseffekt den Substitutionseffekt überwiegt.

6 Das Arbeitsangebot

Woher stammt das Einkommen des Haushalts?

Kaufen und Verkaufen

(ω_1, ω_2) Anfangsausstattung des Haushalts, die er verkaufen oder konsumieren kann.

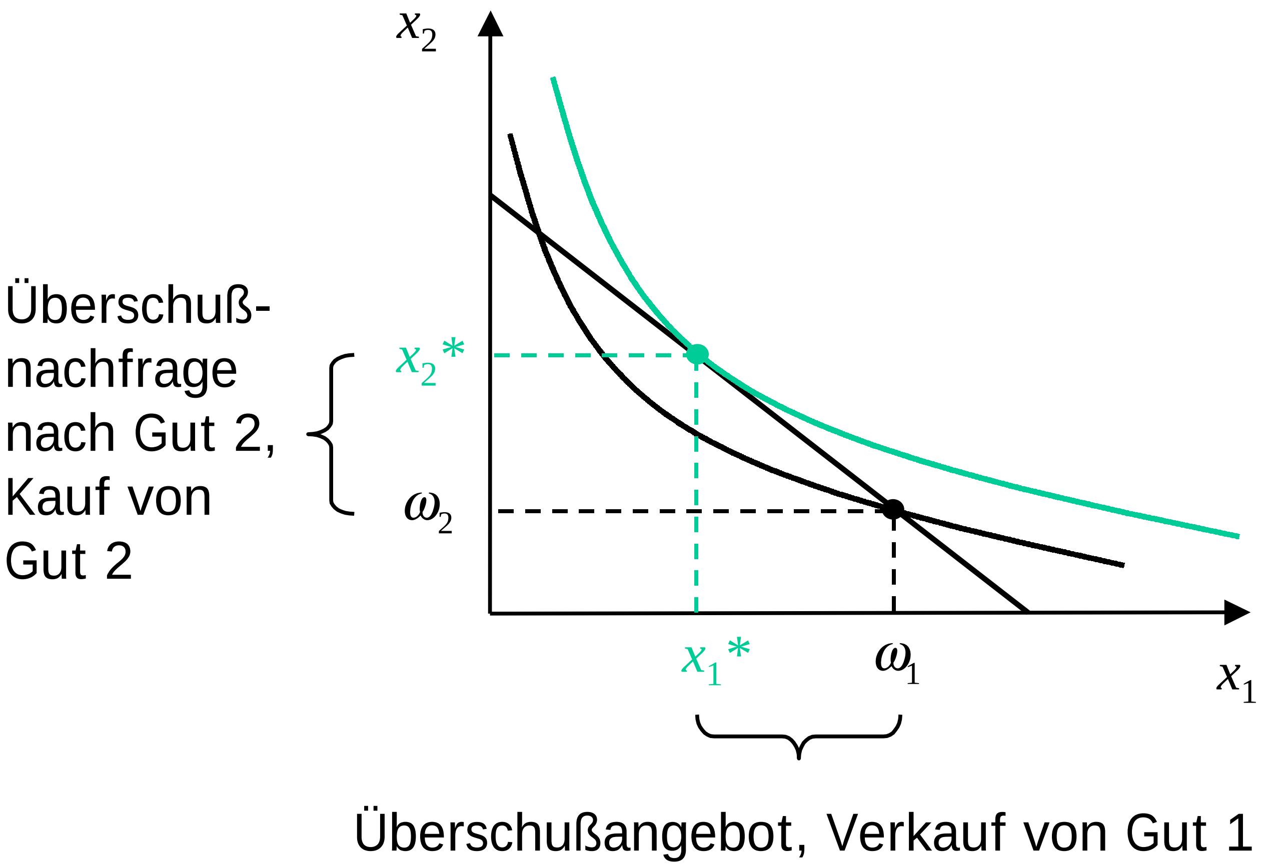
$$\max_{(x_1, x_2)} \ u(x_1, x_2)$$

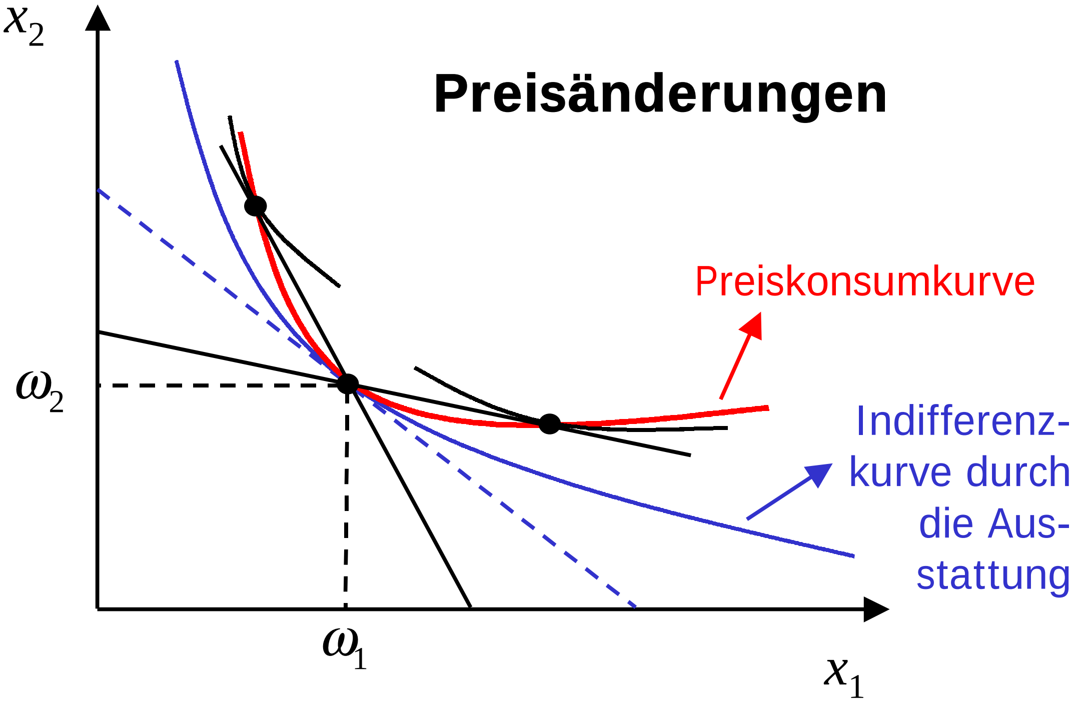
u.d.B. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2$

Die Lösungen sind die Marshallschen Nachfragefunktionen

$$x_1(p_1, p_2, p_1\omega_1 + p_2\omega_2)$$
$$x_2(p_1, p_2, p_1\omega_1 + p_2\omega_2)$$

Das Einkommen hängt von den Preisen ab. Eine Preisänderung ändert den Wert der Anfangsausstattung.


x_2
Überschuß-nachfrage nach Gut 2, Kauf von Gut 2
x_2^*
ω_2
x_1^*
ω_1
x_1
Überschußangebot, Verkauf von Gut 1


x_2
Preisänderungen
Preiskonsumkurve
ω_2
Indifferenz-kurve durch die Aus-stattung
ω_1
x_1

Arbeitsangebot

Der Haushalt konsumiert zwei Güter:

- ein Konsumgut, „der Konsum“ c
- Freizeit f

$u(c, f)$ Nutzenfunktion

$$\frac{\partial u(c, f)}{\partial c} > 0$$

$$\frac{\partial u(c, f)}{\partial f} > 0$$

Freizeit ist ein Gut.

T gesamte zur Verfügung stehende Zeit
= Anfangsausstattung des Gutes Freizeit.

l Arbeitszeit = Verkauf der Zeit

$T = f + l$ Zeitbudget

T wird z.B. gemessen in Stunden pro Tag, Tage pro Jahr.

w Lohnsatz pro Zeiteinheit Arbeit

p Preis für Konsum

$$\max_{(c,f,l)} \; u(c,f)$$

u.d.B. $pc = wl, \quad T = l + f$

$$\max_{(c,f)} \; u(c,f)$$

u.d.B. $pc + wf = wT$

$$\max_{(c,l)} \; u(c,T-l)$$

u.d.B. $pc = wl$

Notwendige Bedingung für ein Nutzenmaximum mit $c^*, f^*, l^* > 0$:

$$\frac{\partial u(c^*, f^*)/\partial f}{\partial u(c^*, f^*)/\partial c} = \frac{w}{p}$$

$$|\,\mathrm{MRS}\,| = \frac{w}{p}$$ **Reallohn**

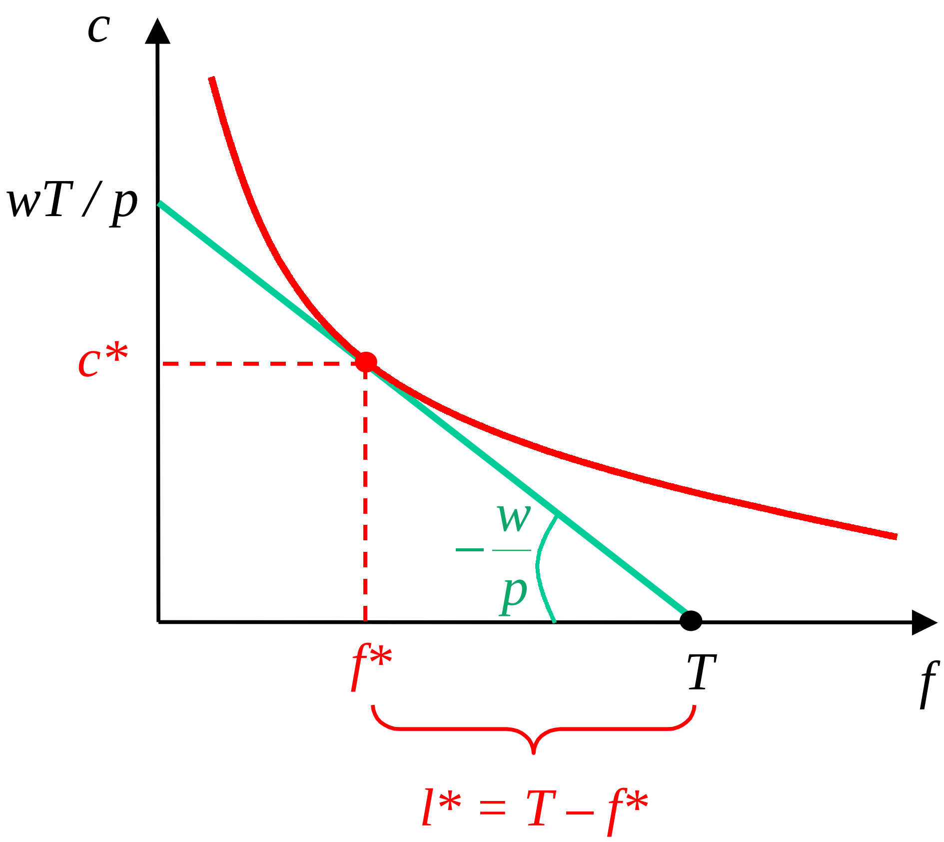
|MRS| gibt an, wie viel zusätzlichen Konsum der Haushalt für eine zusätzliche Arbeitseinheit verlangt.

|MRS| = Grenzzahlungsbereitschaft für Freizeit,
Vorbehaltslohnsatz

w/p gibt an, wie viel zusätzlichen Konsum der Haushalt für eine zusätzliche Arbeitseinheit erhält.

Wenn w/p > |MRS| ist, dann lohnt es sich, mehr zu arbeiten.

Graphische Lösung



Lohnerhöhung und Arbeitsangebot

Bietet der Haushalt mehr Arbeit an, wenn der Lohnsatz steigt?

Differenziere die Marshallsche Freizeitnachfragefunktion $f(p, w, wT)$ nach dem Lohnsatz w:

$$\underbrace{\frac{df(p,w,wT)}{dw}}_{\text{Gesamte Änderung der Freizeitnachfrage auf Grund einer Lohnerhöhung}} = \underbrace{\frac{\partial f(p,w,wT)}{\partial w}}_{\text{Wirkung einer Lohnerhöhung bei unverändertem Wert der Zeitausstattung}} + \underbrace{\frac{\partial f(p,w,wT)}{\partial m} \cdot T}_{\text{Wirkung einer Lohnerhöhung auf Grund der Änderung des Wertes der Zeitausstattung = Austattungseinkommenseffekt}}$$

Nach der Slutzky-Gleichung gilt

$$\frac{\partial f(p,w,wT)}{\partial w} = \frac{\partial h(p,w,u)}{\partial w} - \frac{\partial f(p,w,wT)}{\partial m} \cdot f$$

mit $h(p, w, u)$ als Hicks-Nachfragefunktion nach Freizeit. Ersetzen von $\partial f / \partial w$ liefert

$$\frac{df(p,w,wT)}{dw} = \underbrace{\frac{\partial h(p,w,u)}{\partial w}}_{\text{Substitutioneffekt}} + \underbrace{\frac{\partial f(p,w,wT)}{\partial m} \cdot (T - f)}_{\substack{\text{Gesamter} \\ \text{Einkommenseffekt}}}$$

Da das Arbeitsangebot $l = T - f$ ist, gilt $\mathrm{d}l/\mathrm{d}w = \mathrm{d}(T - f)/\mathrm{d}w$ = - $\mathrm{d}f/\mathrm{d}w$ also

$$\frac{dl}{dw} = \underbrace{-\frac{\partial h(p,w,u)}{\partial w}}_{\substack{\geq 0, \\ \text{da SE} \leq 0}} \underbrace{-\frac{\partial f(p,w,wT)}{\partial m} \cdot l}_{\substack{> 0, \text{ wenn Freizeit inferior ist} \\ < 0, \text{ wenn Freizeit normal ist}}}$$

Folgerung: Eine Lohnerhöhung kann zu einer Senkung des Arbeitsangebotes führen, wenn Freizeit ein normales Gut ist.

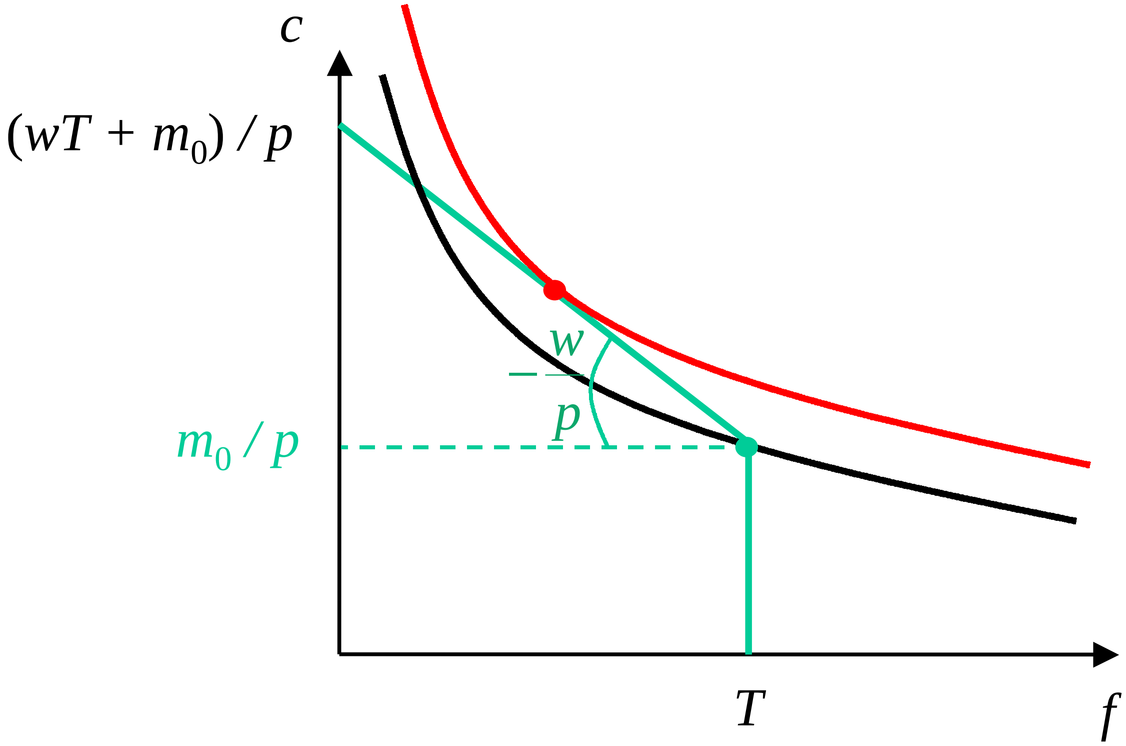
Arbeitsangebot mit Nicht-Arbeitseinkommen

Einkommen $m_0 > 0$ resultiert nicht aus Arbeit.

Budgetgleichung $pc = wl + m_0$
oder $pc + wf = wT + m_0$

Zusätzliche Nebenbedingung, da man nicht mehr als T Zeiteinheiten Freizeit konsumieren kann:

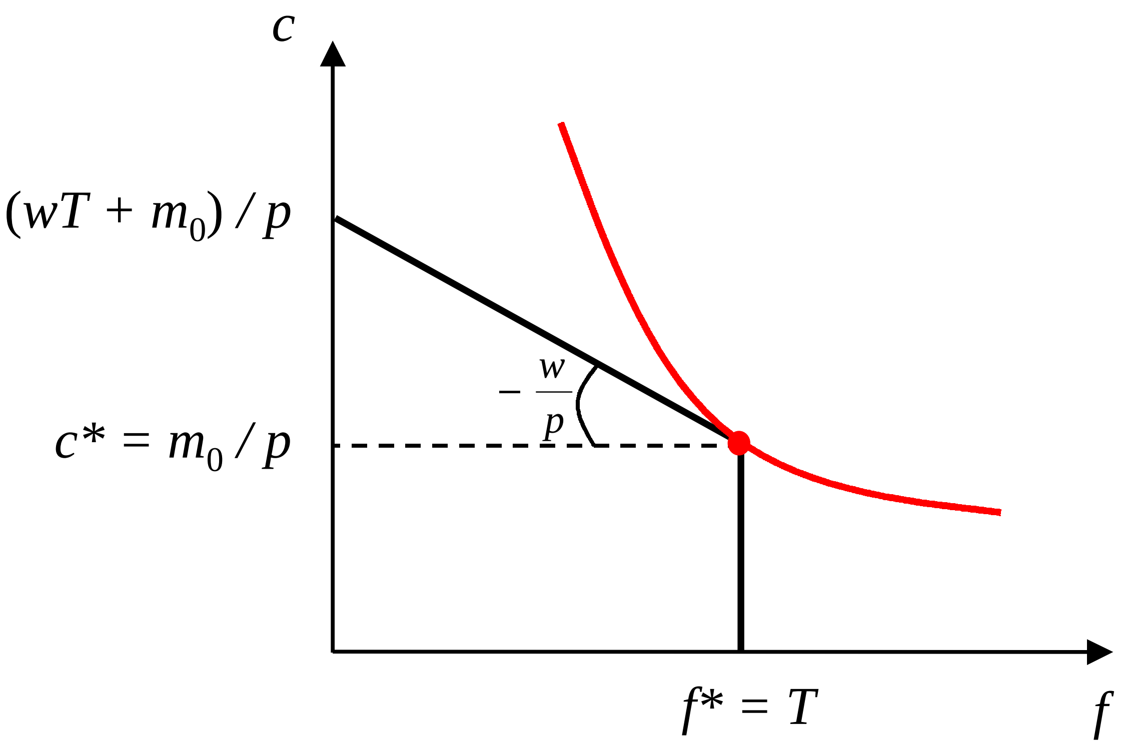
$f \leq T$ bzw. $l \geq 0$.



Es ergibt sich eine Randlösung

$l^* = 0,\ f^* = T,\ c^* = m_0/p,$ falls

$$|MRS| = \frac{\partial u\left(\frac{m_0}{p}, T\right)/\partial f}{\partial u\left(\frac{m_0}{p}, T\right)/\partial c} \geq \frac{w}{p}$$



Der Haushalt würde gerne einen Teil seines Einkommens m_0 verwenden, um über T hinaus noch Freizeit dazuzukaufen.

Zusammenfassung

- Das Einkommen eines Haushalts entsteht durch den Verkauf von **Anfangsausstattungen**.
- Der Wert der Anfangsausstattung hängt von den Güterpreisen ab.
- Das **Überschußangebot** eines Haushalts gibt an, wieviel er von seiner Ausstattung verkaufen will. Die **Überschußnachfrage** gibt an, wieviel er zu seiner Ausstattung dazu kaufen will.
- Ein Haushalt wählt sein Arbeitsangebot so, daß die **Grenzzahlungsbereitschaft** für Freizeit gleich dem **Reallohnsatz** ist.
- Falls **Freizeit** ein **inferior**es Gut ist, **steigt das Arbeitsangebot, wenn der Lohnsatz zunimmt**. Falls Freizeit ein normales Gut ist, kann eine Lohnerhöhung auch zu einem Rückgang des Arbeitsangebotes führen.

B. Theorie des Unternehmens

Das Grundmodell des Unternehmens

Ziel: Gewinnmaximierung

Gewinn = Erlös - Kosten

$$\pi = \sum_{i=1}^{m} p_i y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

Entscheidungsmöglichkeiten:

y_i Menge, die von jedem Erzeugnis (**Output**) $i = 1,2,...,m$ hergestellt wird

x_i Menge, die von jedem Einsatzstoff (**Input, Produktionsfaktor**) $i = 1,2,...,n$ verwendet wird

Beschränkungen der Entscheidungsmöglichkeiten eines Unternehmens

Technische Beschränkungen

Nur technisch durchführbare Input-/ Outputkombinationen können gewählt werden

Marktbeschränkungen

Bei Konkurrenz können Outputpreise $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ und Inputpreise $w = (w_1,w_2, ..., w_n)$ vom Unternehmen nicht verändert werden. Es ist Preisnehmer.

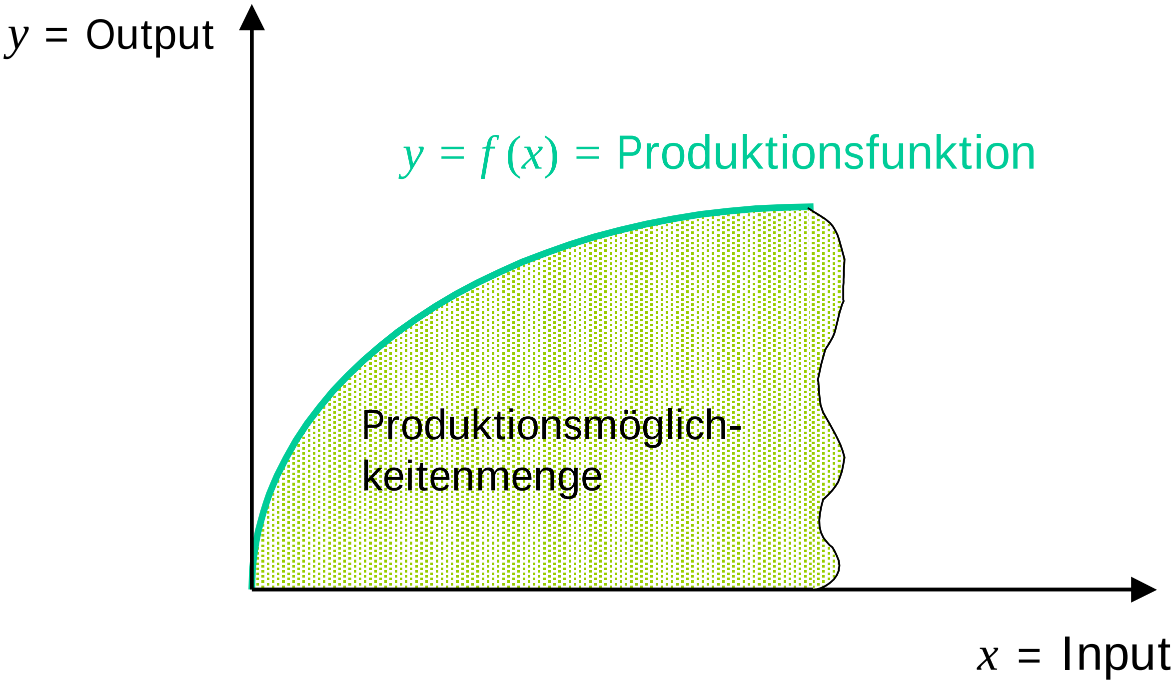
p_i Preis des Outputs i
w_i Preis des Inputs i

7 Technologie und Produktionsfunktion

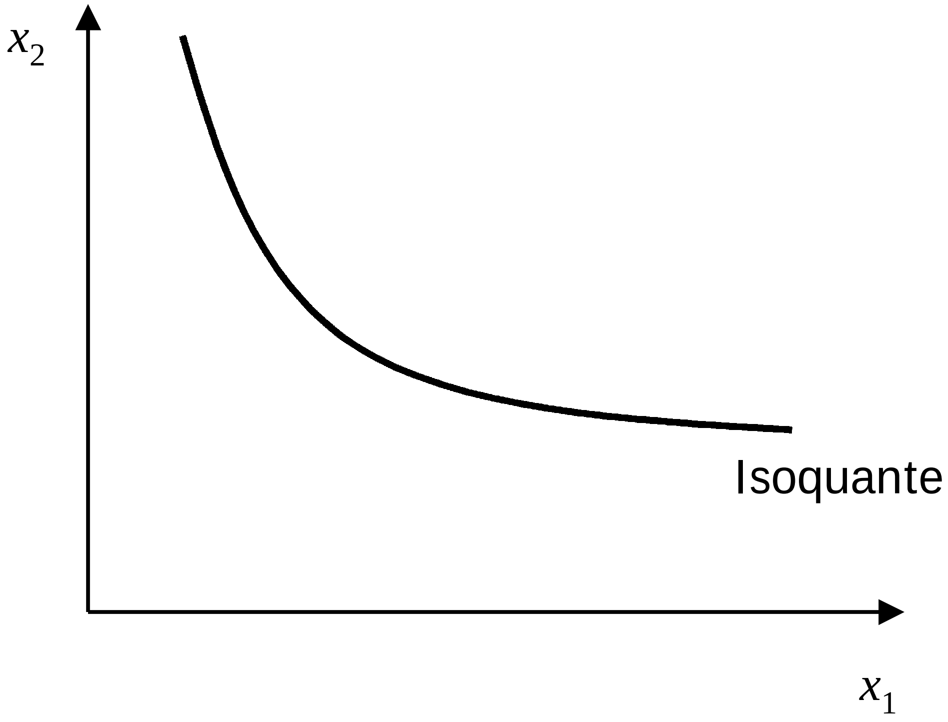
- **Produktionsplan** = Liste aller Inputmengen, die eingesetzt werden und aller Outputmengen, die hergestellt werden.
- Inputs und Outputs werden meist als Stromgrößen gemessen, z.B.
  - 200 Arbeitsstunden pro Tag
  - 5 MWh pro Tag
  - 20 000 PkWs pro Jahr
- mathematische Darstellung von Produktionsplänen durch Vektoren

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$	Inputmengen
$y = (y_1, y_2, ..., y_m)$	Outputmengen
(x, y)	Produktionsplan

- **Einproduktunternehmen**: $m = 1$
  $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ bzw. (x_1, x_2, y) Produktionsplan
- **Produktionsmöglichkeitenmenge**
  (Technologiemenge) Y = Menge aller technisch durchführbaren Produktionspläne
- Die **Produktionsfunktion** $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gibt den maximal möglichen Output an, den man mit der Inputkombination $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erzielen kann.

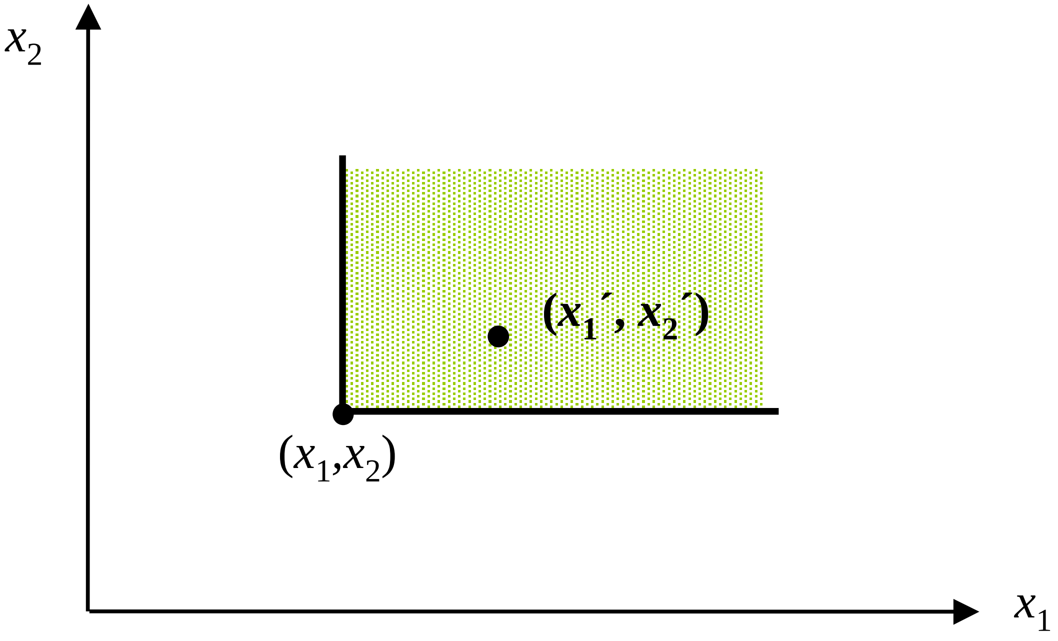


- Die **Isoquante** zum Outputniveau y ist die Menge aller möglichen Kombinationen der Inputs 1 und 2, die gerade ausreichen, um die Menge y des Outputs zu erzeugen.



Eigenschaften der Technologie

- **Monotonie**
  Es ist immer möglich, von einem Input mehr einzusetzen oder von einem Output weniger herzustellen. Wenn mit (x_1,x_2) der Output y hergestellt werden kann, dann kann auch mit $(x_1´, x_2´)$ der Output $y´$ hergestellt werden, falls gilt: $x_1' \geq x_1,\ \ x_2' \geq x_2,\ \ y' \leq y.$



Bei monotoner Technologie gilt für alle $(x_1´, x_2´)$ im grünen Bereich

$$f(x_1', x_2') \geq f(x_1, x_2)$$

- **Konvexität**
  Der gewogene Durchschnitt zweier durchführbarer Produktionspläne ist selbst durchführbar.

  Beispiel:

$x_1 = 100,\ x_2 = 200$

$x_1' = 300,\ x_2' = 100$

$y = 100$

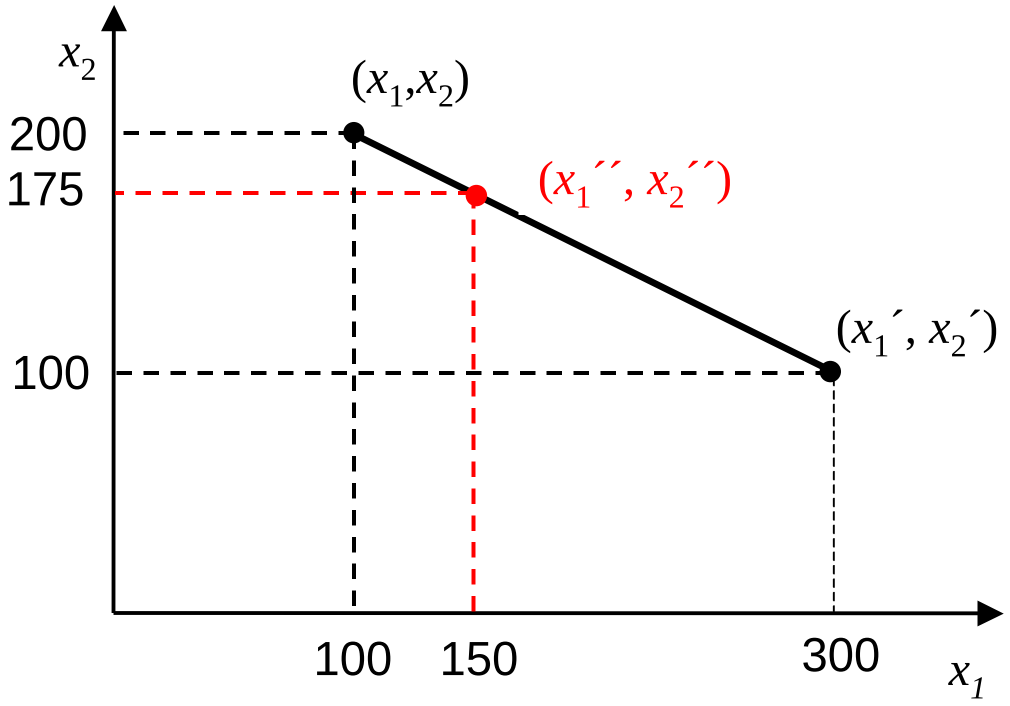
$t = 0{,}75$ Gewichtungsfaktor

Kann man mit

$x_1'' = 0{,}75 \cdot 100 + 0{,}25 \cdot 300 = 150$ und

$x_2'' = 0{,}75 \cdot 200 + 0{,}25 \cdot 100 = 175$

auch den Output y=100 herstellen?



Wenn die Technologie konvex ist, gilt $f(x_1'',x_2'') \geq y$.

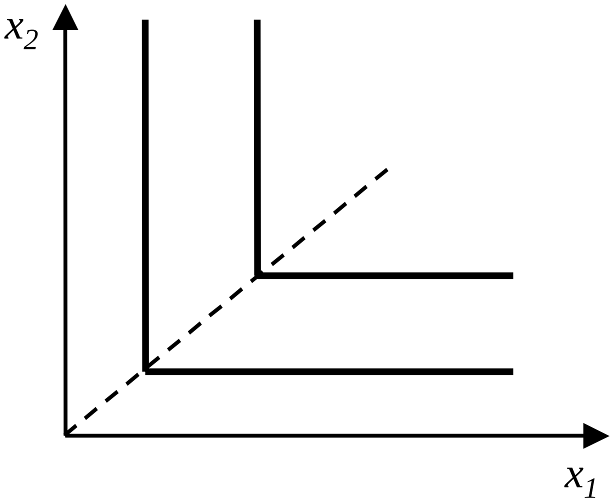
Die Isoquante verläuft unterhalb der Verbindungsgeraden von (x_1,x_2) nach $(x_1´,x_2´)$.

Konvexität im Input-Output-Diagramm

Beispiele für Technologien

Limtationale Produktionsfunktion (festes Faktoreinsatzverhältnis)

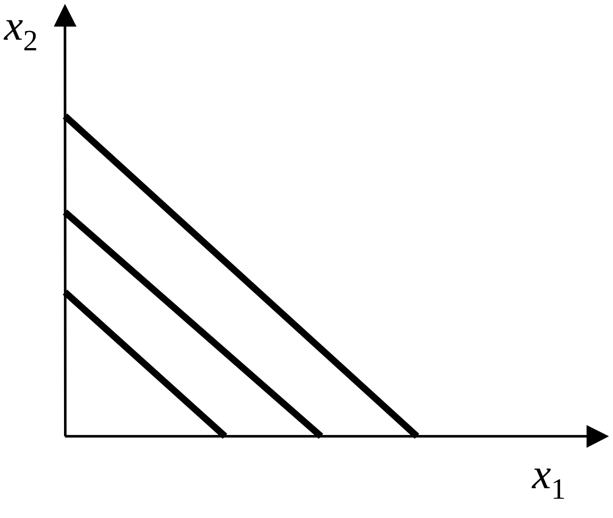
$f(x_1,x_2) = \min\{x_1,x_2\}$.



Lineare Produktionsfunktion

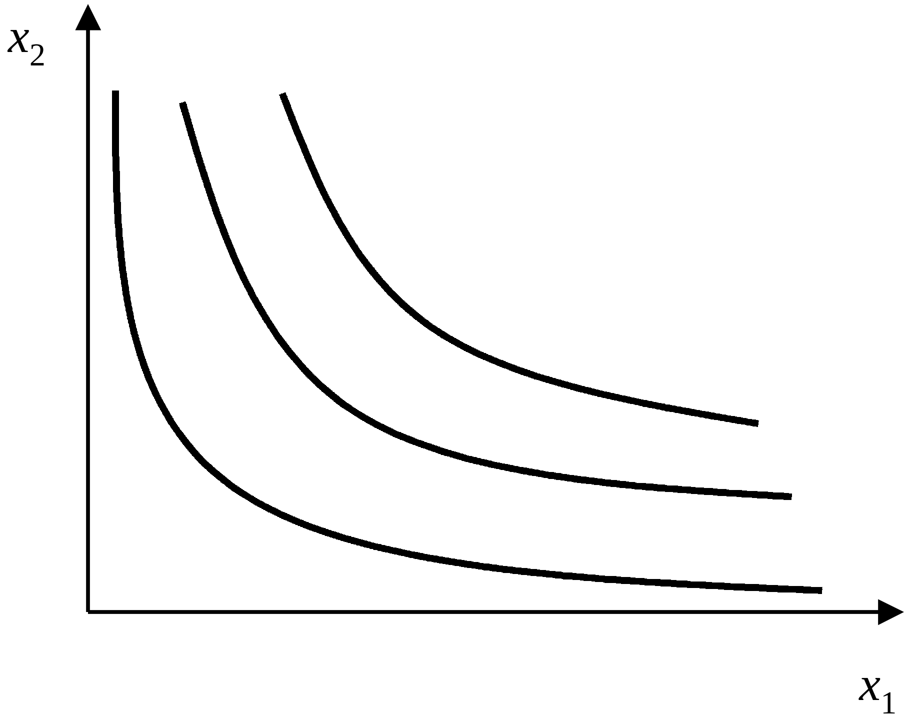
(Vollkommene Substitute)

$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.



Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$ mit $A > 0$, $0 < a, b < 1$.
speziell: $A=1$, $a+b=1$.



Das Grenzprodukt

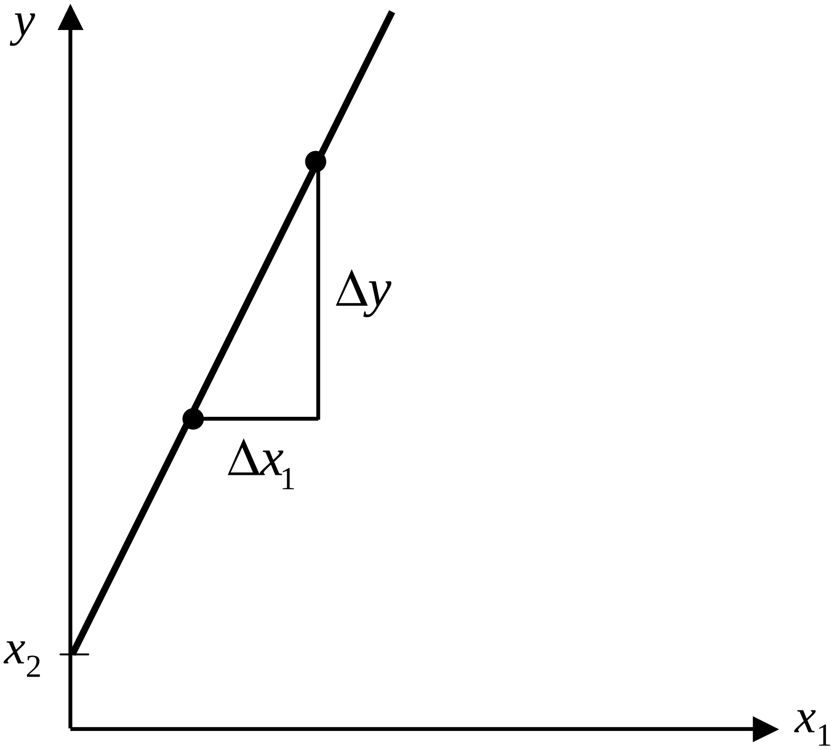
Wie verändert sich der Output, wenn von einem Input eine Einheit zusätzlich eingesetzt wird?

$\Delta x_1 = 1, \ \ \Delta y = ?$

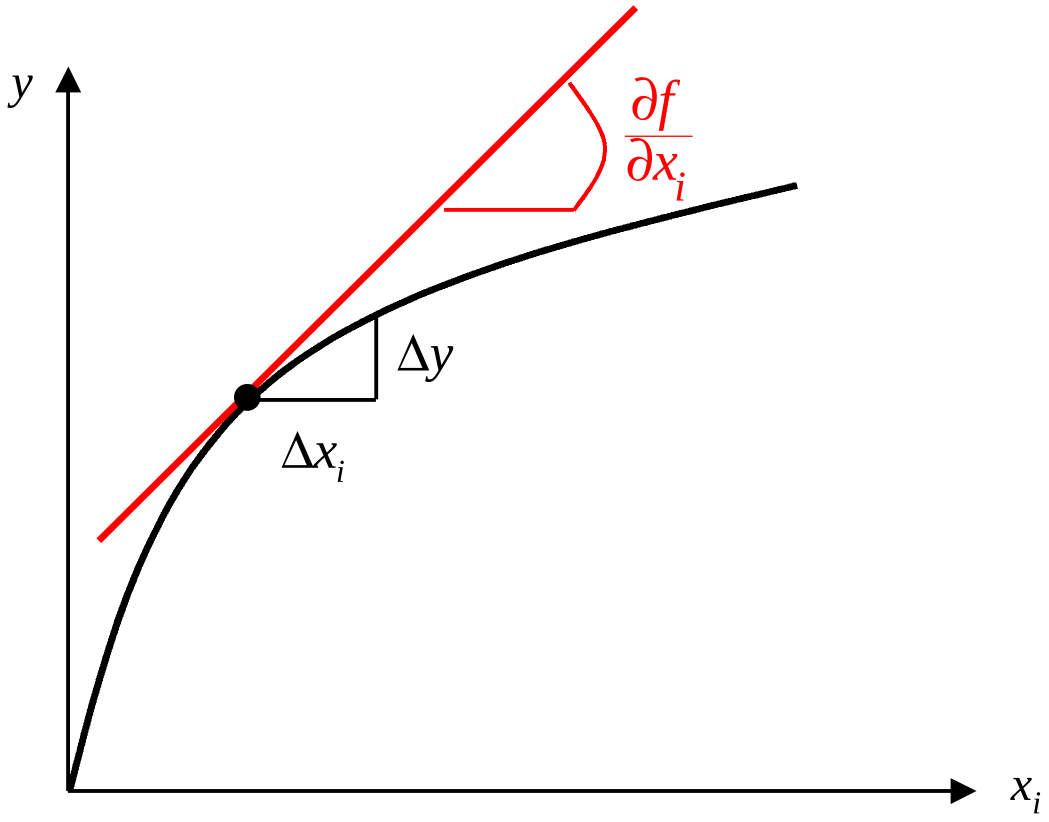
$\frac{\Delta y}{\Delta x_1}$ (endliches) **Grenzprodukt des Faktors 1**; es gibt die zusätzliche Menge des Outputs je Einheit zusätzlichen Inputs an.

Beispiel: $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

x_2 unverändert, $\Delta x_1 = 1 \Rightarrow \Delta y = 2$ also $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = 2.$



Grenzprodukt des Inputs i bei gekrümmter Produktionsfunktion



Das (infinitesimale) Grenzprodukt des Faktors 1:

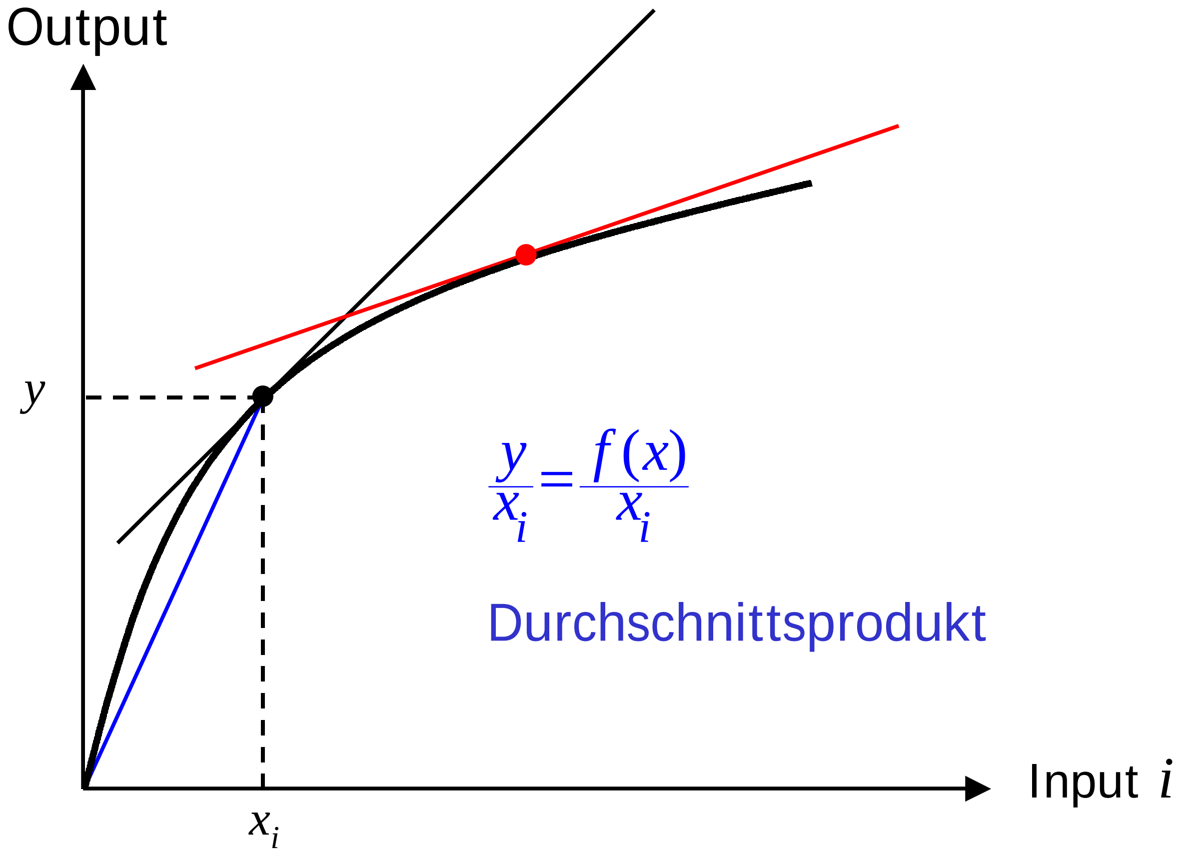
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

gibt das Grenzprodukt für sehr kleine Inputänderungen an.

Das Grenzprodukt des Faktors 2 ist entsprechend definiert.

Abnehmendes Grenzprodukt

Wie verändert sich das Grenzprodukt eines Inputs, wenn von diesem Input mehr eingesetzt wird?



Ertragsgesetz: Ab einem bestimmtem Inputniveau sinkt das Grenzprodukt jedes Faktors.

Skalenerträge

Wie steigt der Output, wenn **alle** Faktoren **proportional** erhöht werden?

Beispiel: $y = f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2.$

Verdoppelung der beiden Inputs führt zum Output

$$\begin{aligned} f(2x_1, 2x_2) &= a \cdot 2x_1 + b \cdot 2x_2 \\ &= 2(ax_1 + bx_2) \\ &= 2y, \end{aligned}$$

also zur Verdoppelung des Outputs.

Allgemein: Führt eine Erhöhung der Inputmengen auf das t-fache ($t > 1$) zu einer Erhöhung des Outputs um mehr oder weniger als das t-fache?

Die Produktionsfunktion hat

- **Konstante Skalenerträge,**

wenn für alle $t \geq 0$ gilt:

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2),$$

- **Zunehmende Skalenerträge**,

wenn für alle $t > 1$ gilt:

$$f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2),$$

- **Abnehmende Skalenerträge**,

wenn für alle $t > 1$ gilt:

$$f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2).$$

Abnehmende Skalenerträge treten auf, wenn ein Produktionsfaktor nicht vermehrt eingesetzt werden kann.

Beispiel: Landwirtschaft mit Inputs Arbeit (x_1), Kapital (x_2) und **Boden** (z).

$f(x_1, x_2)$ hat abnehmende Skalenerträge
$F(x_1, x_2, z)$ hat konstante Skalenerträge.

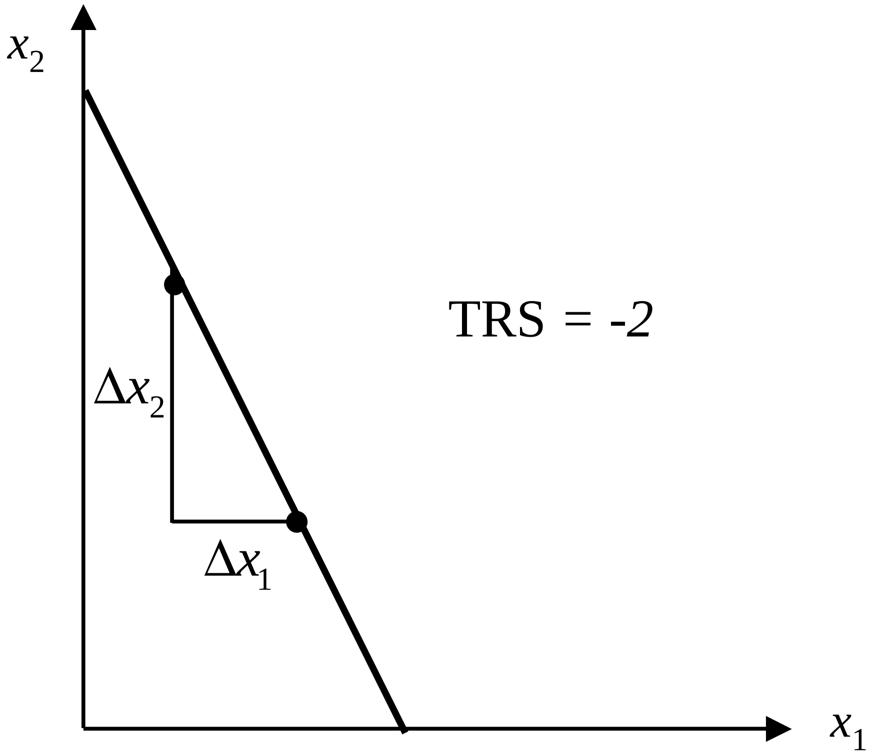
Die technische Rate der Substitution

Kann man einen Input durch den anderen ersetzen, ohne den Output zu verringern?

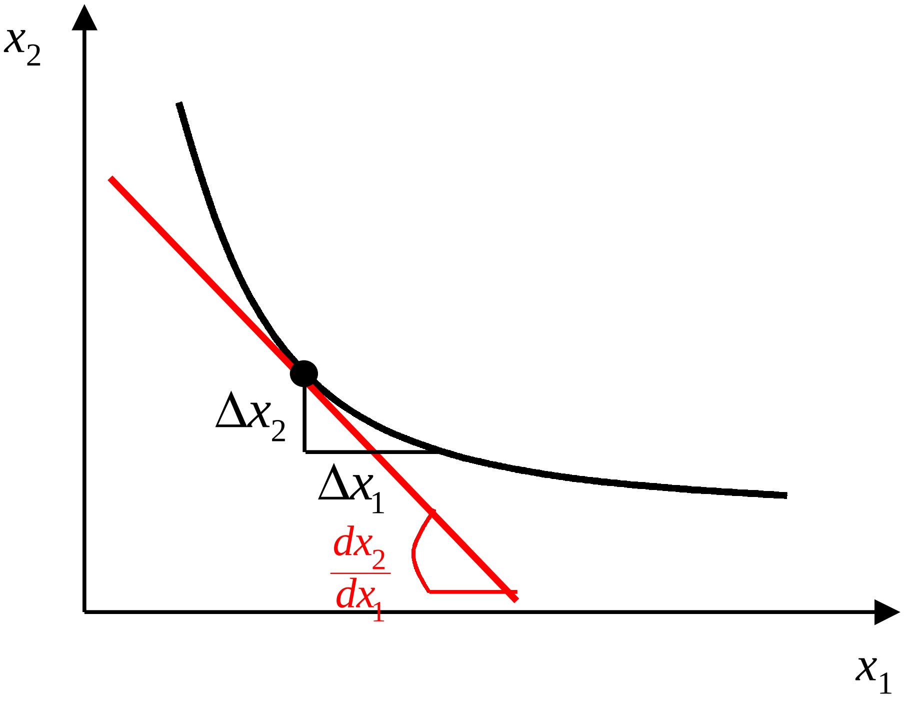
Beispiel: Lineare Technologie $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2.$
Wenn x_1 um $\Delta x_1 = -1$ sinkt und x_2 um $\Delta x_2 = 2$ steigt, bleibt $f(x)$ unverändert.

$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ = TRS(x_1,x_2) **Technische Rate der Substitution**.

Sie mißt das Austauschverhältnis zwischen zwei Inputs in der Produktion bei einem konstanten Outputniveau.



TRS mit gekrümmter Isoquante



$\frac{dx_2}{dx_1}$ (infinitesimale) TRS = Steigung der Isoquante

Berechnung der TRS:

dx_1, dx_2 Änderungen der Inputmengen
dy Änderung der Outputmenge
Totales Differential der Produktionsfunktion:

$$dy = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 .$$

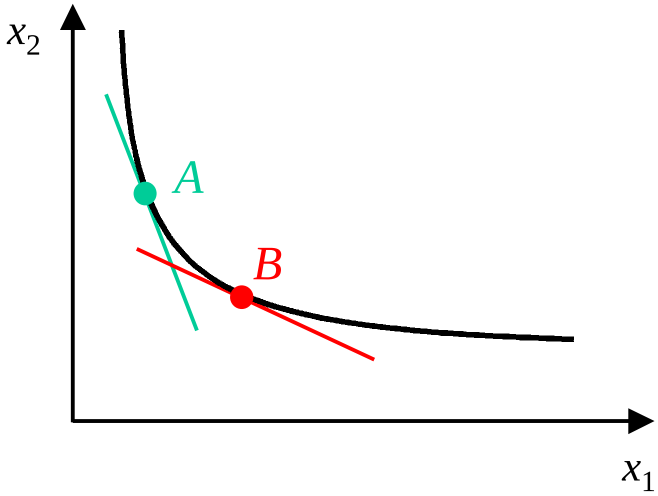
Entlang einer Isoquante ist $dy = 0$, also

$$0 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

$$\text{TRS}(x_1, x_2) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}.$$

Abnehmende |TRS|

Wie ändert sich |TRS|, wenn man sich entlang einer Isoquante nach rechts bewegt?
Wenn die Technologie konvex ist, nimmt |TRS| ab bzw. steigt nicht.



Zusammenfassung

- Die technologischen Beschränkungen eines Unternehmens werden durch **die Menge der Produktionsmöglichkeiten** beschrieben, die alle technologisch durchführbaren Kombinationen von Inputs und Outputs darstellt, und durch die **Produktionsfunktion**, die den maximalen Output für jede vorgegebene Menge der Inputs angibt.
- Eine **Isoquante gibt** alle jene Kombinationen von Inputs an, die ein vorgegebenes Outputniveau produzieren können.
- Im allgemeinen wird angenommen, dass die Technologie **konvex** und **monoton ist**.
- Das **Grenzprodukt** mißt den zusätzlichen Output je zusätzlicher Einheit eines Inputs bei Konstanz aller anderen Inputs. Typischerweise wird angenommen, dass das Grenzprodukt eines Inputs fällt, wenn immer mehr von diesem Input verwendet wird.

- Die **technische Rate der Substitution** (TRS) mißt die Steigung einer Isoquante. Es wird allgemeinen angenommen, dass die TRS sinkt, wenn man sich entlang einer Isoquante bewegt.

- Skalenerträge beschreiben, wie stark der Output steigt, wenn alle Inputs gleichmäßig erhöht werden. **Konstante Skalenerträge** liegen vor, wenn eine Erhöhung aller Inputmengen auf das *t*-fache zu einer Steigerung des Outputs auf das *t*-fache führt. Wenn der Output auf mehr als das *t*-fache zunimmt, dann haben wir **steigende Skalenerträge**; und wenn er um weniger als das *t*-fache ansteigt, dann haben wir **abnehmende Skalenerträge**.

8 Gewinnmaximierung

Ein-Produkt-Unternehmen mit zwei Faktoren

$$y = f(x_1, x_2)$$

$$\pi = pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

Kurzfristige Gewinnmaximierung

Die Einsatzmenge des Faktors x_2 sei kurzfristig fix. Sie ist auf $\bar{x}_2$ festgelegt.

Beispiele:
langfristige Mietverträge für Immobilien,
Kündigungsschutz für Arbeitnehmer,
Kapitalbestand

Optimierung des Unternehmens

$$\max_{x_1} \pi = pf(x_1, \overline{x}_2) - w_1 x_1 - w_2 \overline{x}_2$$

Notwendige Bedingung für ein Gewinn-Maximum:

$$\frac{\Delta\pi}{\Delta x_1} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial\pi}{\partial x_1} = 0$$

Wenn $\frac{\Delta\pi}{\Delta x_1} > 0$ / $\frac{\Delta\pi}{\Delta x_1} < 0$ wäre, dann könnte das Unternehmen den Gewinn erhöhen, indem es

mehr / weniger vom Input 1 einsetzt.

Die optimale Menge x_1* ist die (kurzfristige) Faktornachfrage. Der damit produzierte optimale Output ist das (kurzfristige) Angebot.

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_1} = p \cdot \frac{\partial f(x_1, \overline{x}_2)}{\partial x_1} - w_1 = 0$$

$$p \cdot \frac{\partial f(x_1, \overline{x}_2)}{\partial x_1} = w_1$$

Wertgrenzprodukt des Faktors 1 = Preis des Faktors 1

... gibt an, um wieviel der Erlös steigt, wenn eine Einheit des Faktors 1 zusätzlich eingesetzt wird.

... gibt an, um wieviel die Kosten steigen, wenn eine Einheit des Faktors 1 zusätzlich eingesetzt wird.

Beispiel:

Faktor 1 = Arbeit l

Faktor 2 = Kapital $\overline{k}$

$$\frac{\partial f(l, \overline{k})}{\partial l} = \frac{w}{p}$$

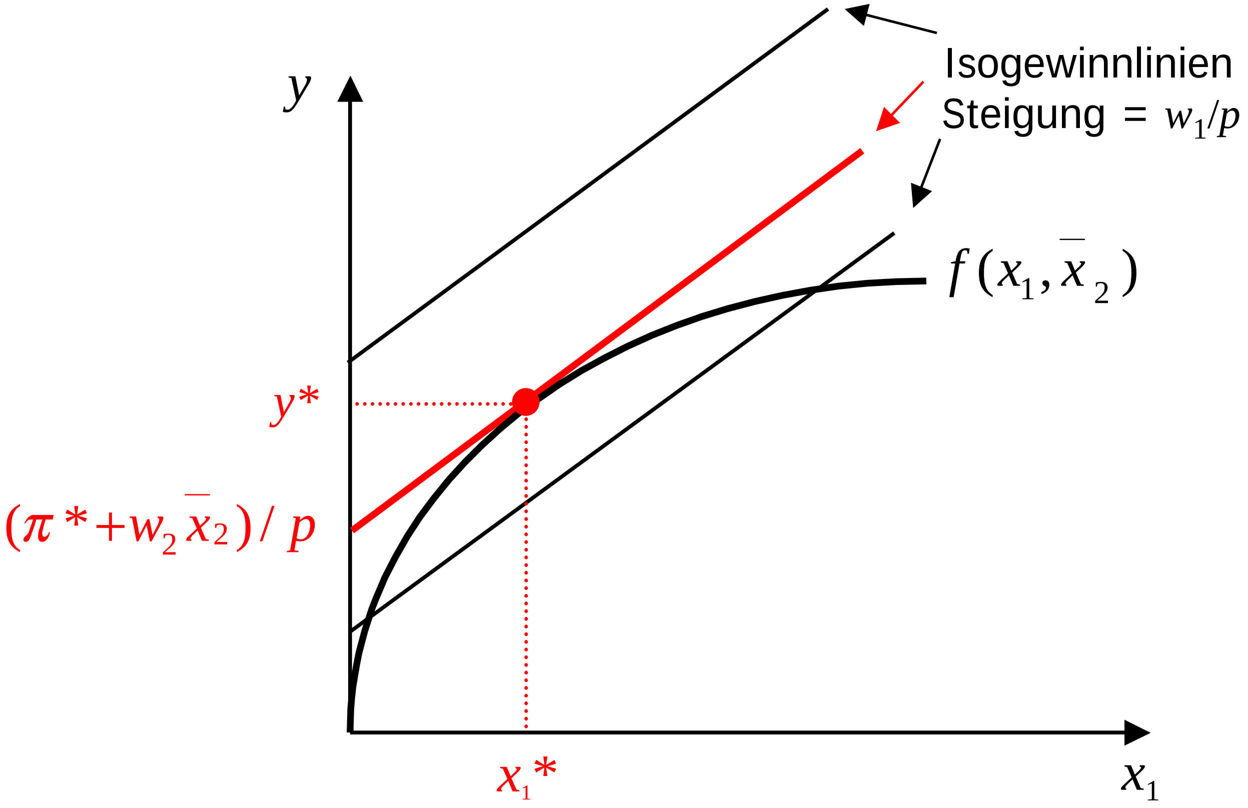
Grenzprodukt der Arbeit = Reallohn

Graphische Lösung

Gewinn: $\pi = py - w_1 x_1 - w_2 \bar{x}_2$

Isogewinnlinie: $y = \dfrac{\pi + w_2 \bar{x}_2}{p} + \dfrac{w_1}{p} x_1$

- Die Isogewinnlinie enthält alle Kombinationen von Inputmenge und Outputmenge, die ein konstantes Gewinnniveau π ergeben.
- Zu jedem Gewinn π gehört eine andere Isogewinnlinie.
- Je höher π, desto höher liegt die zugehörige Isogewinnlinie.
- Suche die höchste Isogewinnlinie, die mit der Produktionsfunktion einen Punkt gemeinsam hat.



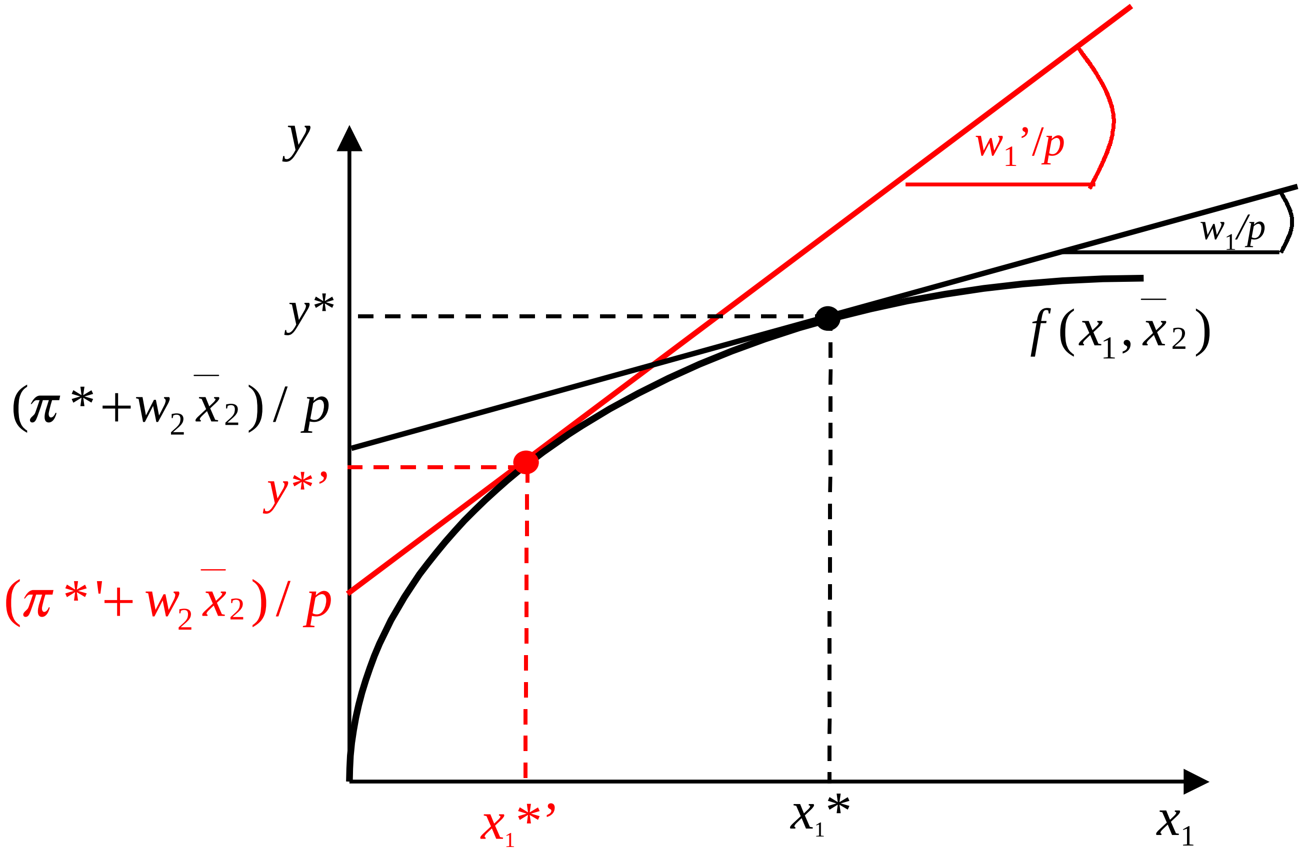
Anwendung:

Wie verändert sich der Gewinn, wenn das Unternehmen mehr Beschäftigte einstellen muß, als es eigentlich will?

Komparative Statik

Wie ändern sich die optimalen Entscheidungen, wenn sich exogene Größen ändern?

Erhöhung des Inputpreises von w_1 auf w_1'.

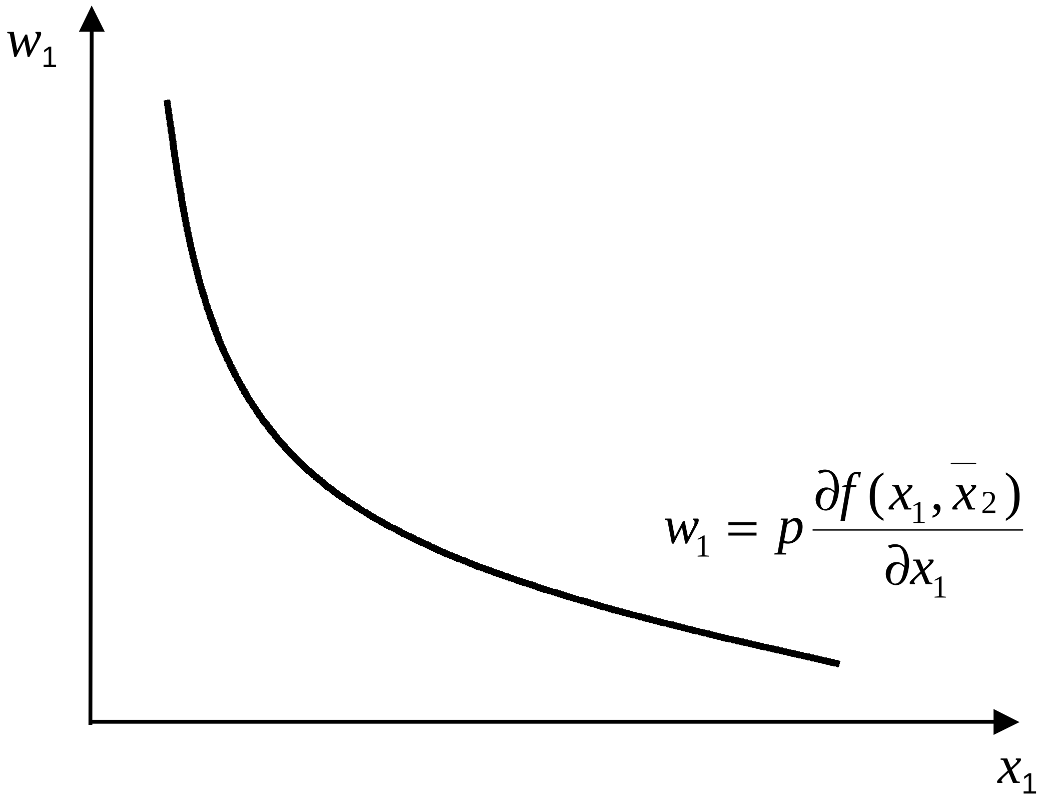


Nachfrage nach Input 1, Angebot und Gewinn sinken.

Inverse Faktornachfragekurven

Die kurzfristige **Nachfragekurve** nach Input 1 gibt die optimale Einsatzmenge dieses Faktors in Abhängigkeit vom Faktorpreis w_1 an.

Die **inverse Faktornachfragekurve** gibt an, wie hoch der Faktorpreis sein muß, damit eine gegebene Menge an Inputs nachgefragt wird.



Erhöhung des Outputpreises p

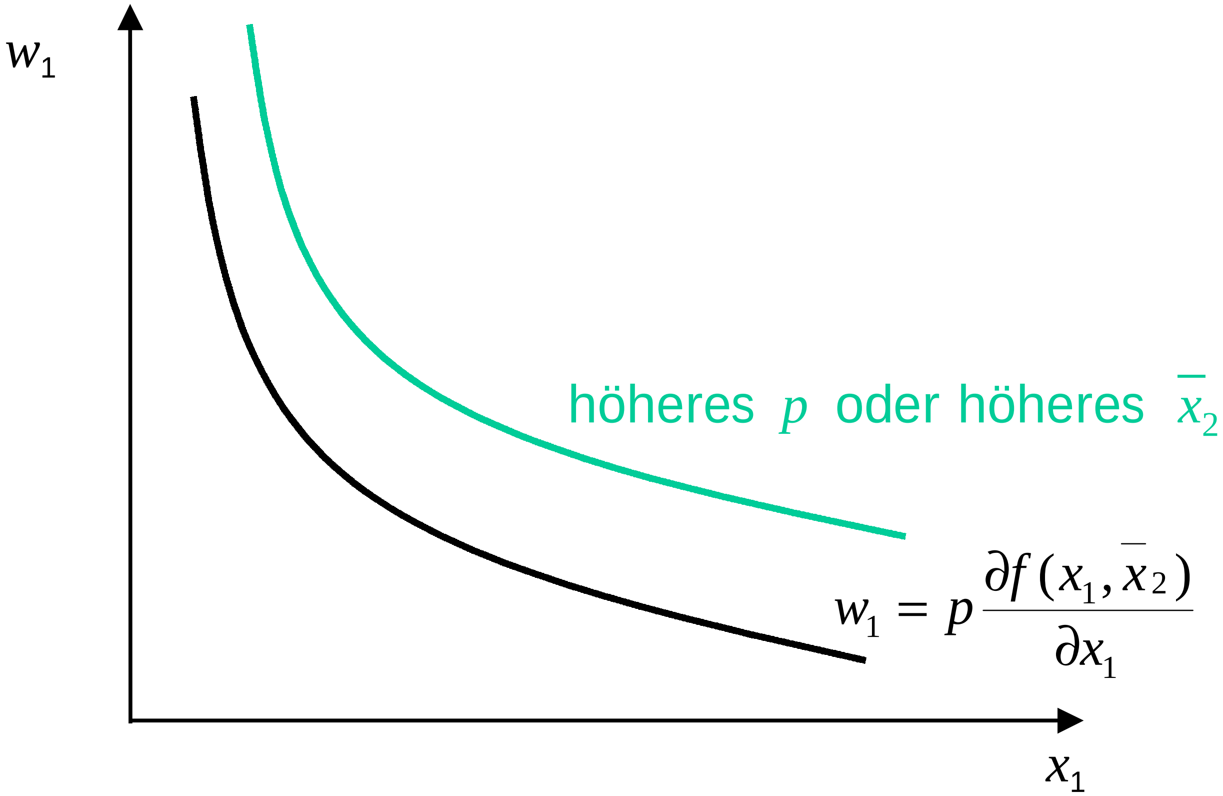
- die Isogewinnlinien werden flacher
- Nachfrage nach Input 1, Angebot und Gewinn steigen.

Erhöhung des Inputpreises w_2

- die Steigung der Isogewinnlinien ändert sich nicht.
- Faktornachfrage und Angebot bleiben unverändert, der Gewinn sinkt.

Erhöhung der Menge des fixen Faktors $\bar{x}_2$

- die Steigung der Isogewinnlinien ändert sich nicht.
- Wie ändert sich das Grenzprodukt des ersten Faktors?
- Plausible Annahme: Faktor 1 wird produktiver.
- Nachfrage nach Faktor 1 steigt.



Anwendung:

„Hohe Löhne führen nicht zu Beschäftigungsverlust, weil durch die hohen Löhne die Produktivität steigt.“

Langfristige Gewinnmaximierung

Langfristig sind alle Faktormengen frei wählbar.

$$\max_{x_1,x_2} \pi = pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

Die optimalen Faktormengen x_1* und x_2* erfüllen die notwendigen Bedingungen:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - w_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{w_1}{p}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - w_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = \frac{w_2}{p}$$

- Auflösen dieser zwei Gleichungen nach den zwei Unbekannten x_1* and x_2* liefert die **Faktornachfragefunktionen**:

$$x_1* = x_1(p, w_1, w_2)$$
$$x_2* = x_2(p, w_1, w_2)$$

- Einsetzen der Faktornachfragefunktionen in die Produktionsfunktion liefert die **Angebotsfunktion**:

$$y^* = f\left(x_1(p, w_1, w_2), x_2(p, w_1, w_2)\right) = y(p, w_1, w_2)$$

- Einsetzen der Faktornachfragefunktionen und der Angebotsfunktion in die Gewinngleichung

$$\pi = py - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

liefert die **Gewinnfunktion**:

$$\begin{aligned} &\pi(p, w_1, w_2) \\ &= py(p, w_1, w_2) - w_1 x_1(p, w_1, w_2) - w_2 x_2(p, w_1, w_2) \end{aligned}$$

Die Nachfragefunktionen, die Angebotsfunktion und die Gewinnfunktion

- sind Ergebnis der Optimierung des Unternehmens
- hängen vom Outputpreis und von den Inputpreisen ab.

Frage:

Wie ändern sich

a) die Inputnachfragen,

b) das Angebot und

c) der Gewinn,

wenn der Outputpreis und alle Inputpreise um den selben Faktor steigen?

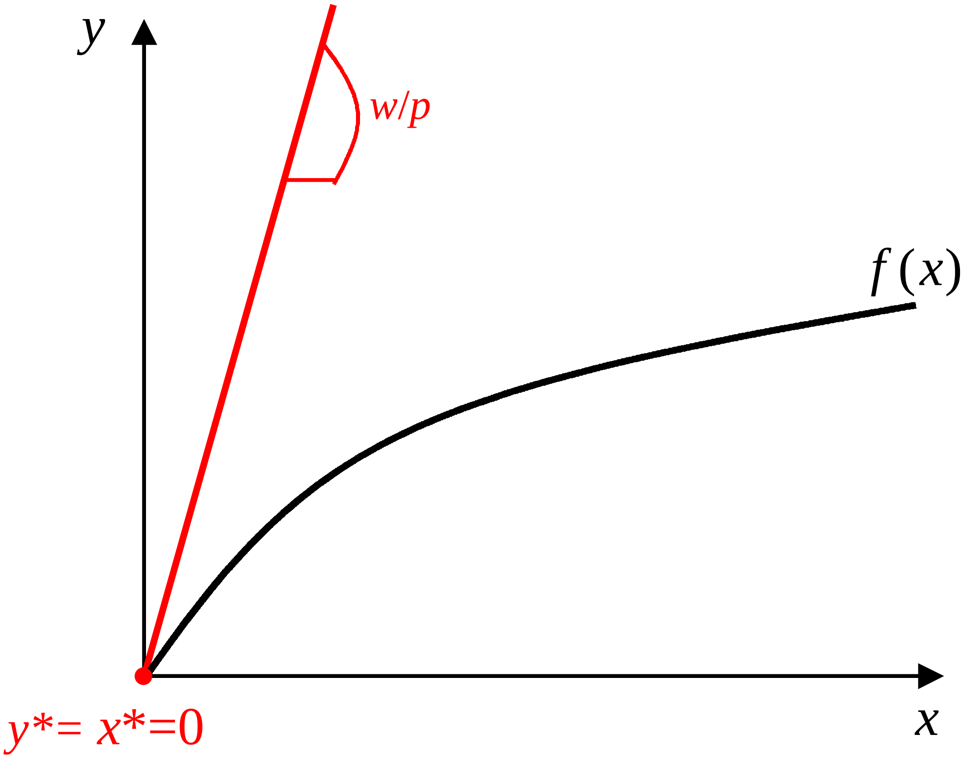
Probleme mit der Bedingung $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = \frac{w_i}{p}$

1. Produktionsfunktion ist nicht differenzierbar

z.B. festes Faktoreinsatzverhältnis

2. Randlösung $x_i^* = 0$ für einen Input.

Insbesondere kann $y^* = 0$ optimal sein.



$$x_i^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \leq \frac{w_i}{p}$$

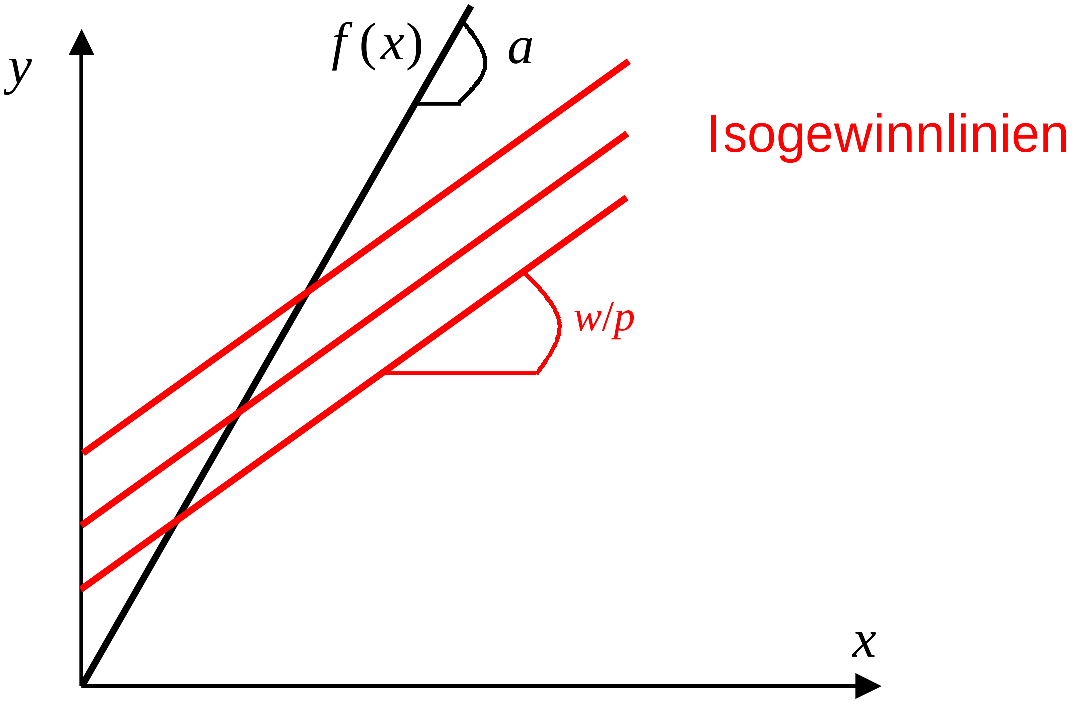
3. Es gibt keinen gewinnmaximierenden Produktionsplan

z.B. 1 Input, 1 Output, $f(x) = ax,\ a>0.$

$$\pi = pax - wx = p\left(a - \frac{w}{p}\right)x$$

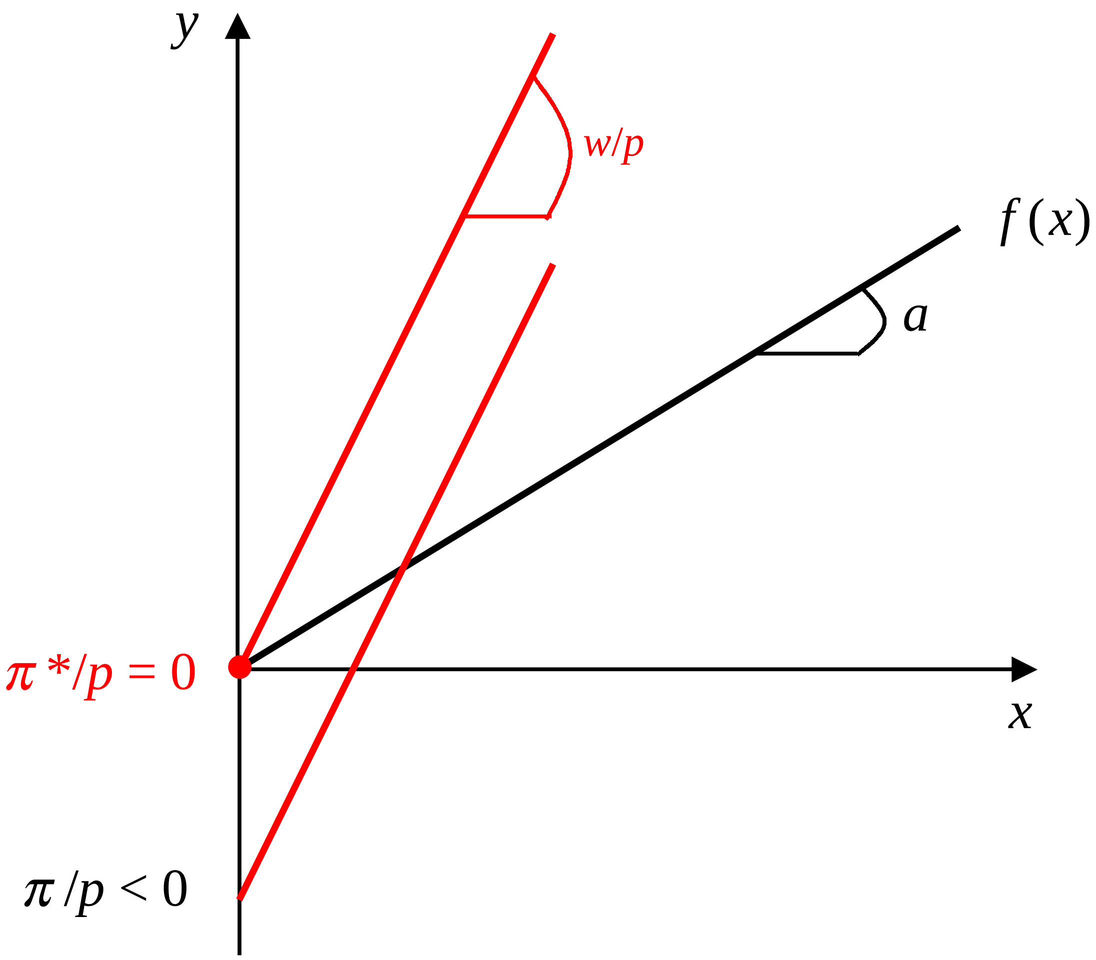
$$\pi \left\{\begin{matrix} \text{steigt} \\ \text{bleibt konstant} \\ \text{sinkt} \end{matrix}\right\} \text{ wenn } x \text{ steigt } \Leftrightarrow a \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} \frac{w}{p}$$

$a > w/p$.



Das Unternehmen will „unendlich viel“ produzieren.

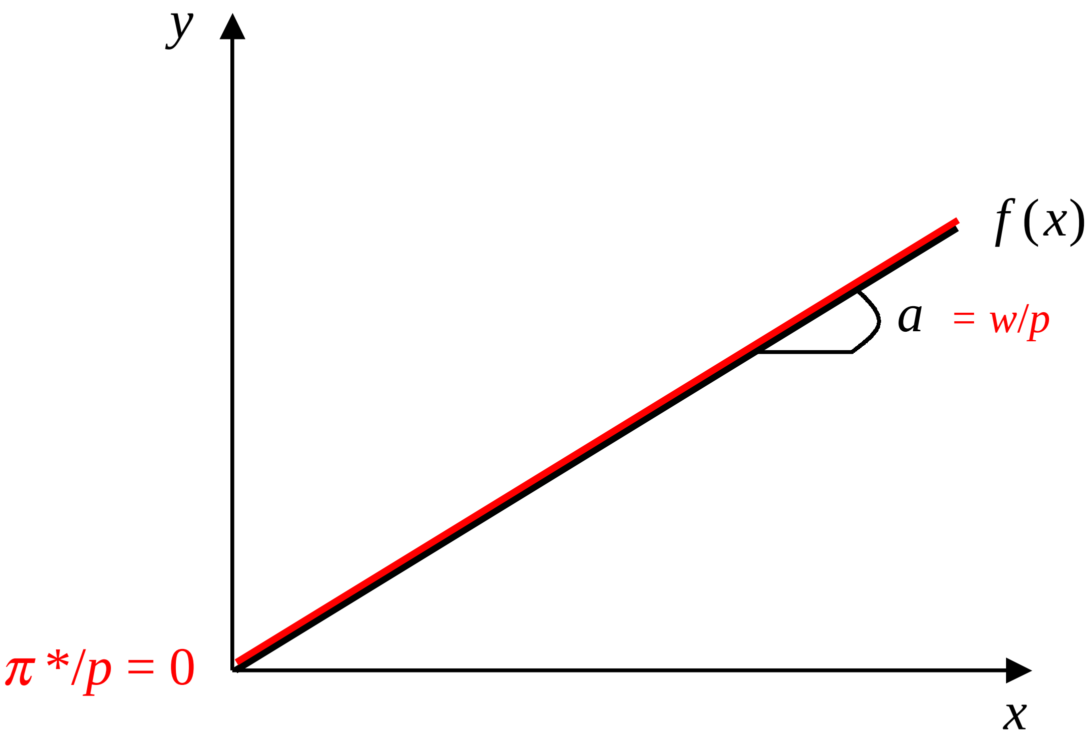
$a < w/p.$



Randlösung

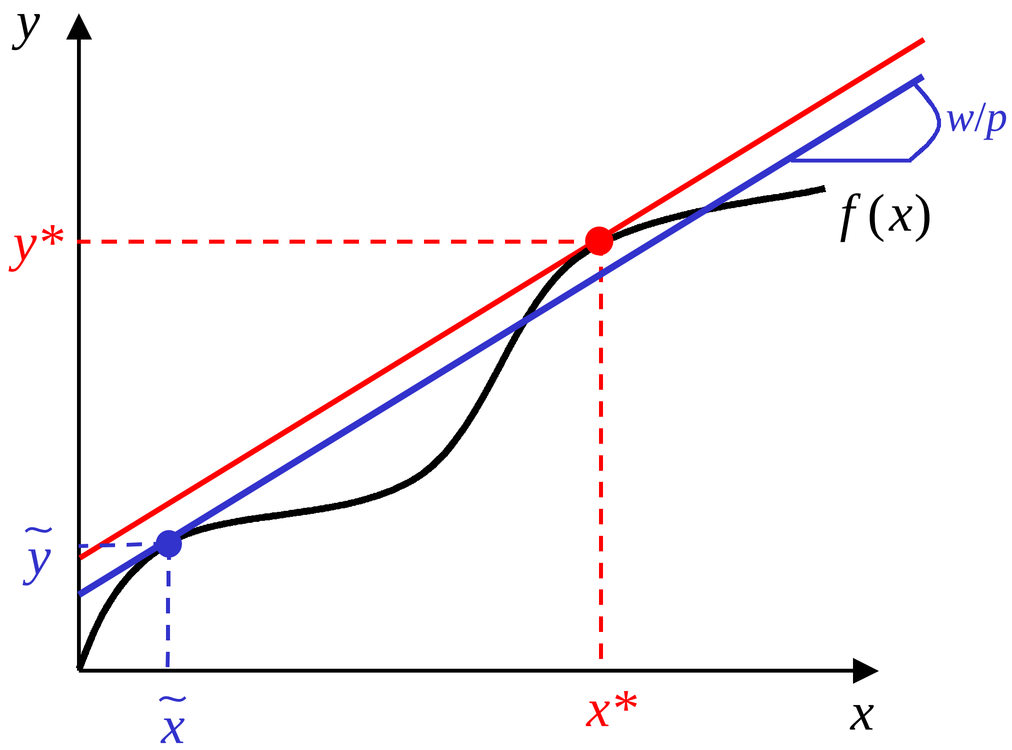
4. Mehrere gewinnmaximierende Produktionspläne

$a = w/p.$

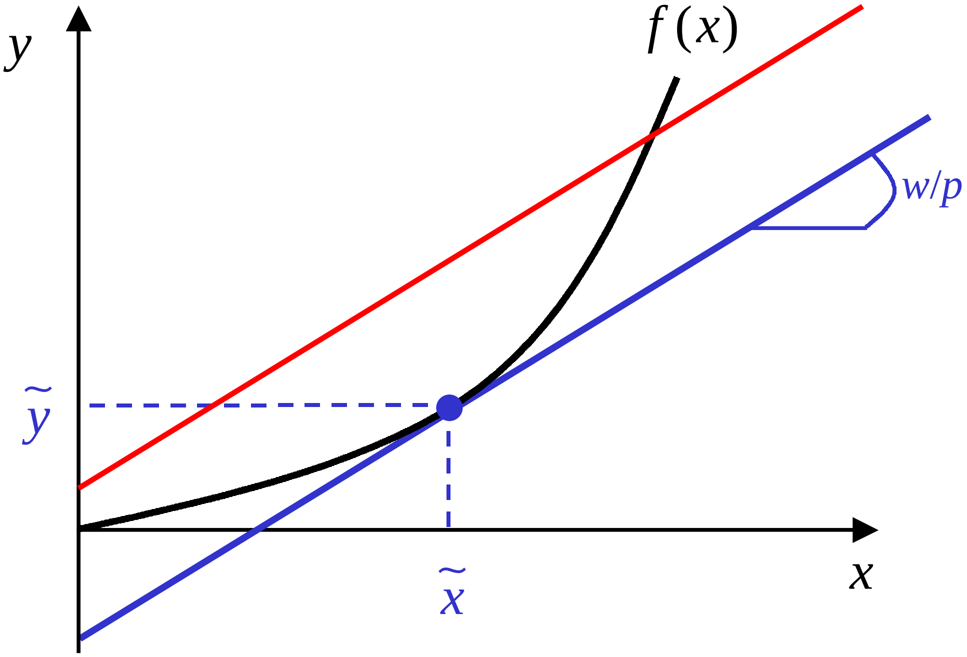


Alle $(x, f(x))$ führen zum optimalen Gewinn $\pi^* = 0.$

5. Lokales statt globalem Gewinnmaximum



6. Gewinnminimum



Gewinnmaximierung und konstante Skalenerträge

Ein Unternehmen habe konstante Skalenerträge. Der langfristig gewinnmaximierende Produktionsplan sei $(x_1*,x_2*,y*)$. Dieser führe zu einem positiven Gewinn $\pi^* = py^* - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* > 0.$

Wenn das Unternehmen das Niveau seines Inputeinsatzes verdoppelt, verdoppelt sich auch sein Output. Der Gewinn ist dann

$$\begin{aligned} & p \cdot 2y* - w_1 \cdot 2x_1^* - w_2 \cdot 2x_2^* \\ &= 2(py* - w_1 x_1^* - w_2 x_2^*) \\ &= 2\pi* > \pi*. \end{aligned}$$

Also war der Produktionsplan $(x_1*,x_2*, y*)$ gar nicht gewinnmaximierend. (Auch $(2x_1*,2x_2*,2y*)$ ist nicht gewinnmaximierend.)

1. Zwischenergebnis:

Wenn $\pi^* > 0$ möglich ist, dann gibt es bei konstanten Skalenerträgen keinen gewinnmaximierenden Produktionsplan.

Das Unternehmen kann langfristig immer die Produktion einstellen $(x_1 = x_2 = y = 0)$.

2. Zwischenergebnis:

Der maximale Gewinn ist mindestens 0.

Ergebnis:

Der Gewinn eines Unternehmens, das konstante Skalenertäge für alle Outputniveaus aufweist, ist langfristig Null.

Warum stellt der Unternehmer die Produktion nicht ein, wenn der Gewinn sowieso null ist?

Bei den Kosten müssen auch Leistungen berücksichtigt werden, die der Eigentümer dem Unternehmen zur Verfügung stellt, z.B.

- Arbeitskraft des Unternehmers
- Eigenkapital
- Grundstücke, die den Eigentümern gehören.

Diese Leistungen werden mit dem Preis bewertet, den sie in anderen Verwendungen erzielen könnten. Diese Kosten werden **Opportunitätskosten** genannt.

Folgen unendlicher Expansion eines Unternehmens mit konstanten Skalenerträgen im Wettbewerb:

- das Unternehmen könnte so groß werden, daß es nicht mehr effektiv arbeiten könnte, somit hat es keine konstanten Skalenerträge für alle Outputniveaus;
- das Unternehmen dominiert den Markt für sein Erzeugnis, so daß das Modell der Gewinnmaximierung bei Konkurrenz nicht mehr paßt;
- Marktzutritt senkt den Outputpreis.

Hotellings Lemma

$$\frac{\partial \pi(p, w_1, w_2)}{\partial p} = y(p, w_1, w_2)$$

$$\frac{\partial \pi(p, w_1, w_2)}{\partial w_i} = -x_i(p, w_1, w_2) \text{ für alle Inputs } i = 1, 2$$

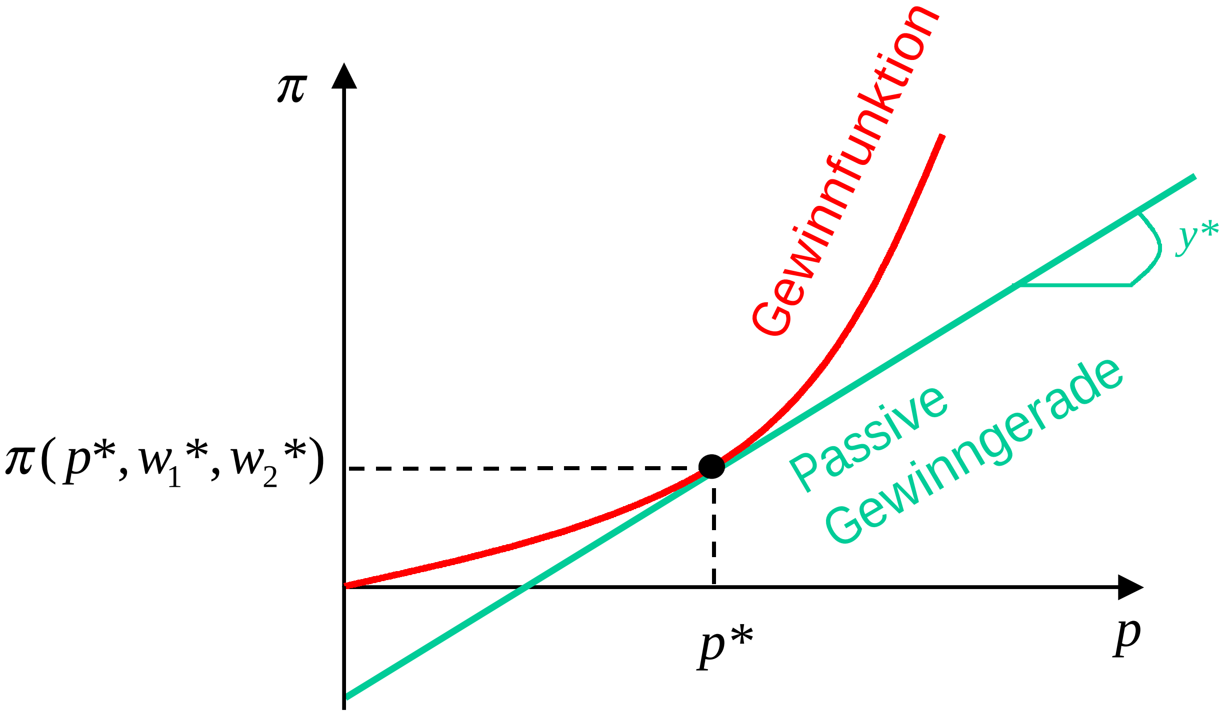
Begründung:

Es sei (x_1^*, x_2^*, y^*) der zu den Preisen p^*, w_1^*, w_2^* optimale Produktionsplan. Die **Passive Gewinngerade**

$$\pi = py^* - w_1^* x_1^* - w_2^* x_2^*$$

drückt aus, wie sich der Gewinn durch eine Änderung des Outputpreises verändern würde, wenn das Unternehmen seinen Produktionsplan **nicht** an die veränderten Preise **anpassen** würde.

Der durch die Gewinnfunktion $\pi\left(p, w_1^*, w_2^*\right)$ ausgedrückte **optimale** Gewinn ist mindestens so groß.



Gewinnfunktion und passive Gewinngerade haben die gleiche Steigung.

Zusammenfassung

- **Gewinne** sind die Differenz zwischen Erlösen und Kosten. Bei dieser Definition müssen **Opportunitätskosten** mit einbezogen werden.
- **Fixe Faktoren** sind Faktoren, deren Menge nicht verändert werden kann; die Menge **variabler Faktoren** kann angepaßt werden.
- **Kurzfristig** können einige Faktoren fix sein; **Langfristig** sind alle Faktoren variabel.
- Bei Gewinnmaximierung ist **das Wertgrenzprodukt** eines jeden variablen Faktors **gleich seinem Faktorpreis**.
- Die **Angebot**sfunktion eines Unternehmens ist eine **steigende Funktion des Outputpreises**, die **Nachfrage**funktion nach jedem **Faktor** ist eine **abnehmende Funktion seines Preises**.
- Wenn ein Unternehmen **konstante Skalenerträge** aufweist, dann ist sein maximaler **Gewinn langfristig Null**.

9 Kostenminimierung

Kostenminimierung ist ein Teilproblem der Gewinnmaximierung:

Produktion eines vorgegebenen Outputs y zu möglichst niedrigen Kosten $w_1x_1 + w_2x_2$.

Beschränkung (**Nebenbedingung**): $f(x_1,x_2) = y$

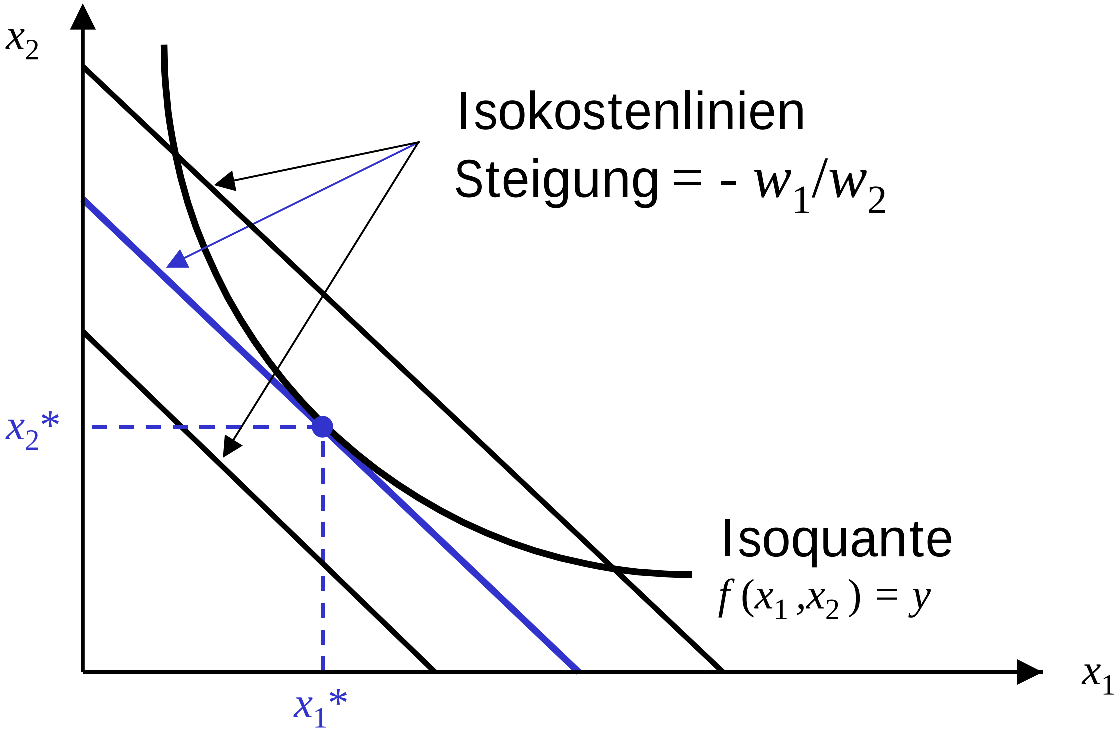
Kostenminimierung ist notwendig, aber nicht hinreichend für Gewinnmaximierung.

Graphische Lösung

Kostengleichung: $w_1 x_1 + w_2 x_2 = C$

Isokostenlinie: $$x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1.$$

- Für jedes Kostenniveau C gibt es eine andere Isokostenlinie.
- Je höher die Kosten C, desto höher liegt die Isokostenlinie.
- Suche die niedrigste Isokostenlinie, die mit der Isoquante zu y noch einen Punkt gemeinsam hat.



Die Lösung (x_1^*, x_2^*) der Kostenminimierungsaufgabe heißt **Minimalkostenkombination**.

Isoquante und Isokostenlinie tangieren sich an der Minimalkostenkombination.

Steigung der Isoquante = Steigung der Isokostenlinie

Notwendige Bedingung für ein Kostenminimum

$$\begin{aligned} \text{TRS} &= -\frac{w_1}{w_2} \\ \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial f(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} &= \frac{w_1}{w_2} \end{aligned}$$

Beispiel:

Es sei $\mathrm{TRS} = \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1 = -2$ und $w_1/ w_2 =1$. Dann ändert sich der Output nicht, wenn 2 Einheiten weniger von Input 2 und 1 Einheit mehr von Input 1 eingesetzt werden. Man spart $-2w_2$ an den Ausgaben für Input 2 und zahlt zusätzlich $1w_1$ für den Input 1. Gesamte Kostenänderung:

$$-2w_2 + w_1 = \left(-2 + \frac{w_1}{w_2}\right)w_2 = -w_2 < 0.$$

|TRS| ist das Verhältnis, zu dem die beiden Inputs in der Produktion gegeneinander ausgetauscht werden können.

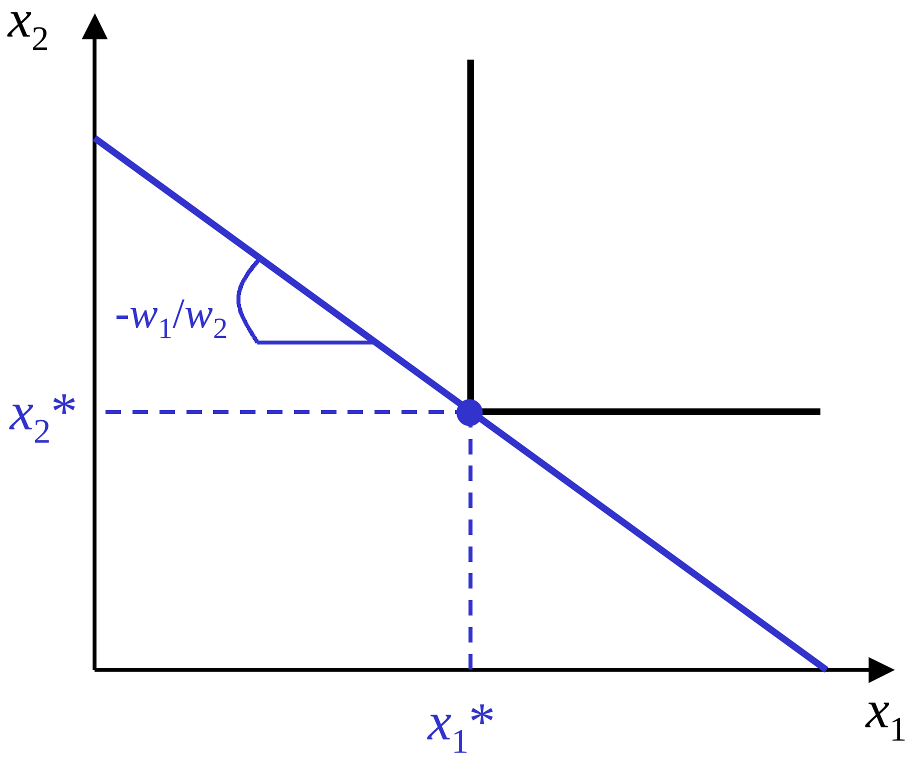
Der **Relativpreis** (das **Preisverhältnis**) w_1 /w_2 ist das Verhältnis, zu dem die beiden Inputs am Markt gegeneinander getauscht werden können.

Im Kostenminimum sind beide Verhältnisse gleich.

Probleme mit der Bedingung $\text{TRS} = -\frac{w_1}{w_2}$

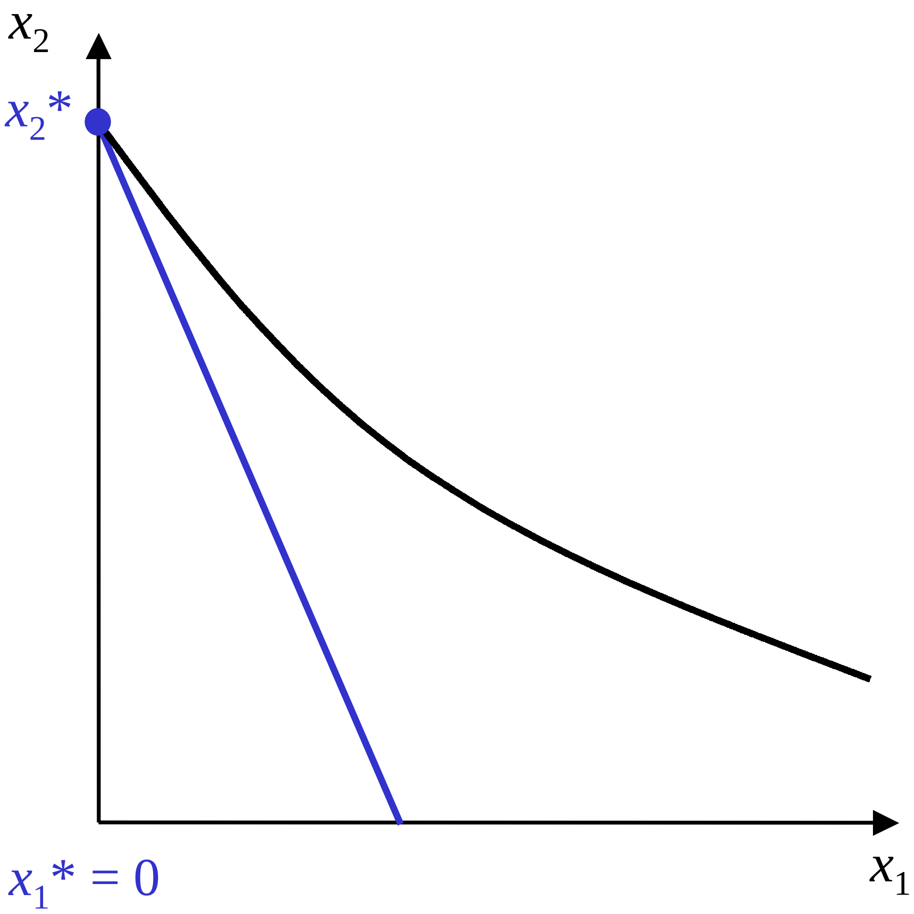
1. Die Produktionsfunktion ist nicht differenzierbar

z.B. festes Faktoreinsatzverhältnis $y = \min\{ax_1; bx_2\}$



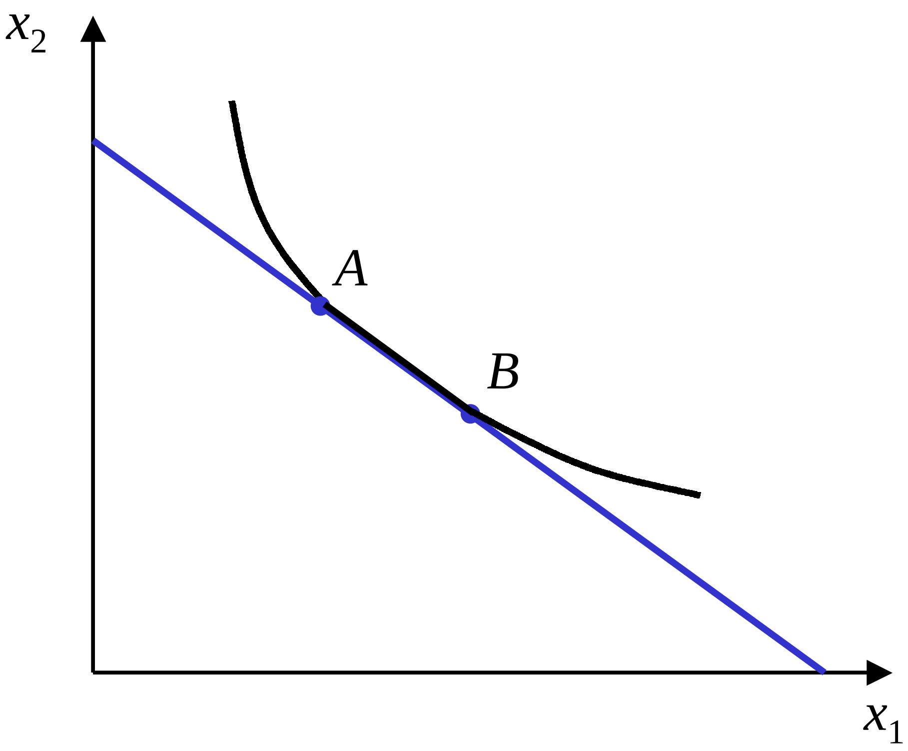
Die Isoquante ist links von (x_1^*,x_2^*) steiler als die Isokostenlinie, rechts davon flacher.

2. Randlösung x_1*=0 oder x_2*=0.



$$|\mathrm{TRS}| = \frac{\partial f(0, x_2*)/\partial x_1}{\partial f(0, x_2*)/\partial x_2} \le \frac{w_1}{w_2}$$

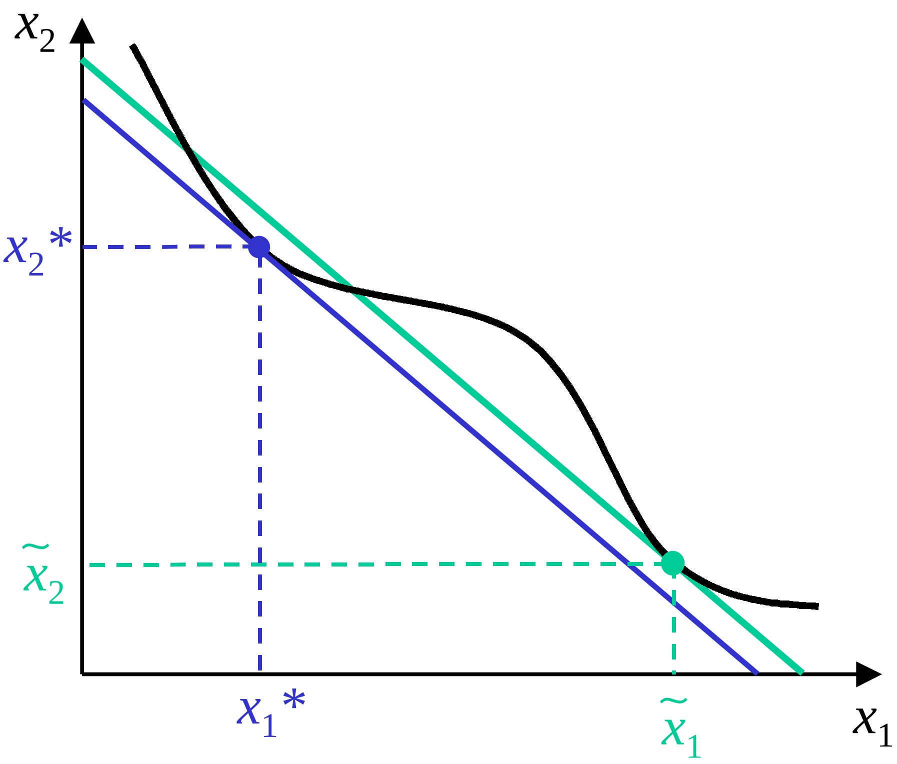
3. Mehrere kostenminimierende Inputbündel



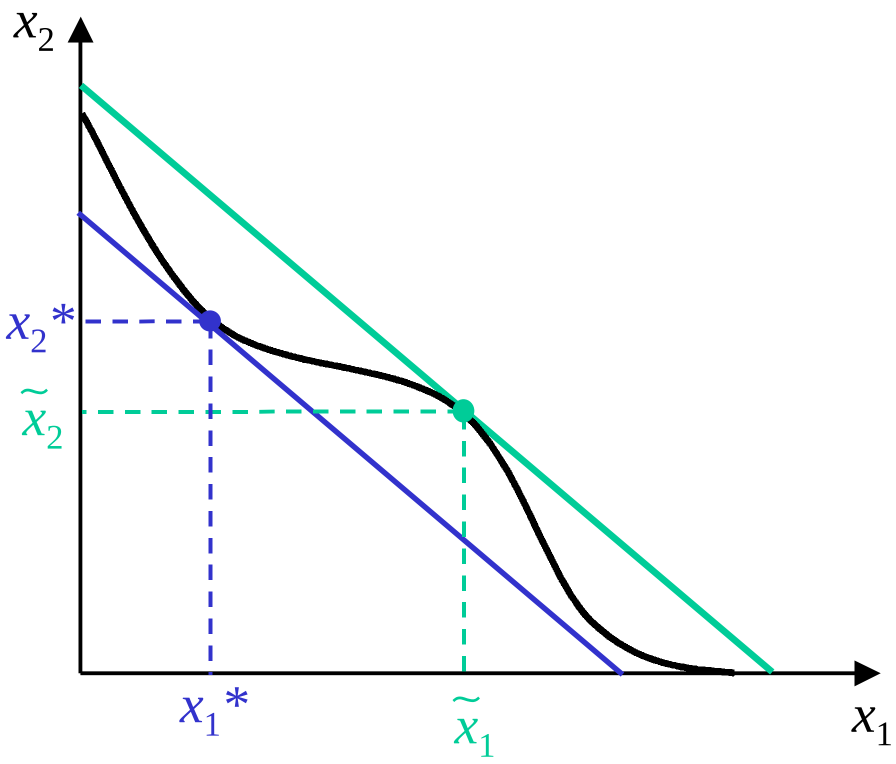
Alle Inputkombinationen zwischen *A* und *B* sind Minimalkostenkombinationen.

Alle diese Punkte erfüllen TRS = $-w_1/w_2$.

4. Lokales, aber kein globales Kostenminimum



5. Kostenmaximum



Hinreichende Bedingungen

Die Technologie ist konvex und monoton;

(x_1,x_2) erfüllt $\text{TRS} = - w_1/w_2$ und

$f\,(x_1,x_2) = y$

$\Rightarrow$

(x_1,x_2) minimiert die Kosten zur Produktion von y.

Notwendige Bedingungen

(x_1,x_2) minimiert die Kosten zur Produktion von y;

f ist differenzierbar;

$x_1 > 0,\ x_2 > 0$

$\Rightarrow$

(x_1,x_2) erfüllt $\text{TRS} = - w_1/w_2$ und

$f\,(x_1,x_2) = y$.

Analytische Lösung

$$\min_{x_1, x_2} \; w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{u.d.B.} \quad f(x_1, x_2) = y.$$

Lagrange-Funktion

$$L = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda [f(x_1, x_2) - y]$$

λ ist die **Lagrangevariable.**

Notwendige Bedingungen für ein Optimum mit positiven Faktoreinsatzmengen $x_1^*, x_2^* > 0$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = w_1 - \lambda \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = w_2 - \lambda \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \qquad (2)$$

$$f(x_1^*, x_2^*) - y = 0. \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*) / \partial x_1}{\partial f(x_1^*, x_2^*) / \partial x_2} = -TRS(x_1^*, x_2^*)$$

Diese Gleichung und die Nebenbedingung bestimmen die beiden optimalen Inputmengen.

Bedingte Faktornachfragefunktionen:

$$x_1{}^* = x_1(w_1, w_2, y)$$

$$x_2{}^* = x_2(w_1, w_2, y)$$

Einsetzen in die Kostengleichung liefert die **Kostenfunktion**:

$$\mathrm{c}(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2\, x_2(w_1, w_2, y)$$

Die Kostenfunktion gibt die bei den Inputpreisen w_1 und w_2 zur Produktion von y Einheiten des Outputs **notwendigen Kosten** an.

Kostenminimierung entspricht der Ausgabenminimierung in der Haushaltstheorie:

Output ... Nutzen
Faktorpreise ... Güterpreise
Bedingte Faktornachfragefunktionen
... Hickssche Nachfragefunktionen
Kostenfunktion ... Ausgabenfunktion

Interpretation der Lagrangevariablen

Für alle w_1, w_2 und y gilt:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y)$$

Differenzieren nach y liefert :

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} = w_1 \frac{\partial x_1(w_1, w_2, y)}{\partial y} + w_2 \frac{\partial x_2(w_1, w_2, y)}{\partial y} \quad (4)$$

Zudem gilt (3) für alle w_1, w_2 und y:

$$f\left(x_1(w_1, w_2, y), x_2(w_1, w_2, y)\right) - y = 0$$

Differenzieren nach y liefert :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1(w_1, w_2, y)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2(w_1, w_2, y)}{\partial y} - 1 = 0 \qquad (5)$$

Ersetze in (5) $\partial f / \partial x_i$ für beide Inputs $i = 1{,}2$ gemäß den notwendigen Bedingungen (1) und (2) durch $\partial f / \partial x_i = w_i / \lambda$. Es folgt:

$$w_1 \frac{\partial x_1(w_1, w_2, y)}{\partial y} + w_2 \frac{\partial x_2(w_1, w_2, y)}{\partial y} = \lambda \qquad (6)$$

Aus (4) und (6) folgt:

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} = \lambda$$

Grenzkosten = Lagrangevariable

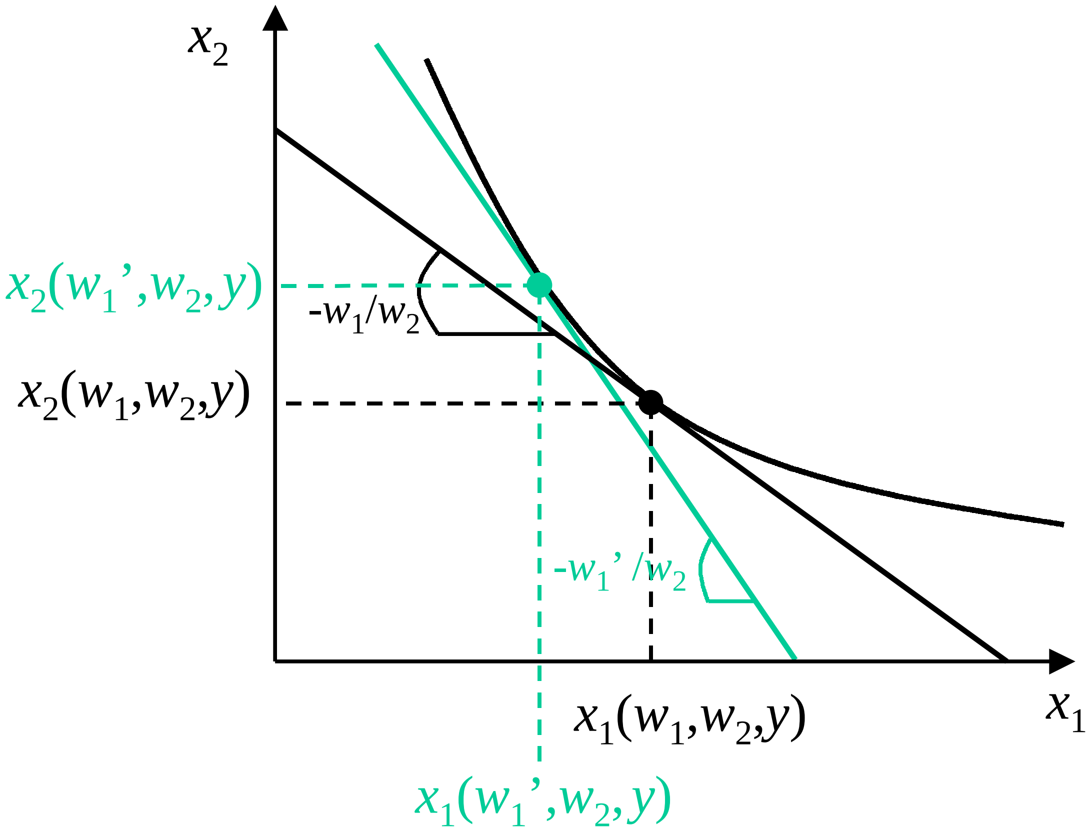
Die Lagrangevariable gibt an, um wieviel die Kosten steigen, wenn eine Einheit mehr produziert werden soll.

Allgemein:
Die Lagrangevariable gibt an, um wieviel sich der optimale Wert der Zielfunktion verbessert, wenn die Nebenbedingung um eine Einheit gelockert wird.

Komparative Statik

Wie ändert sich die bedingte Faktornachfrage, wenn ein Inputpreis oder der Output sich ändern?

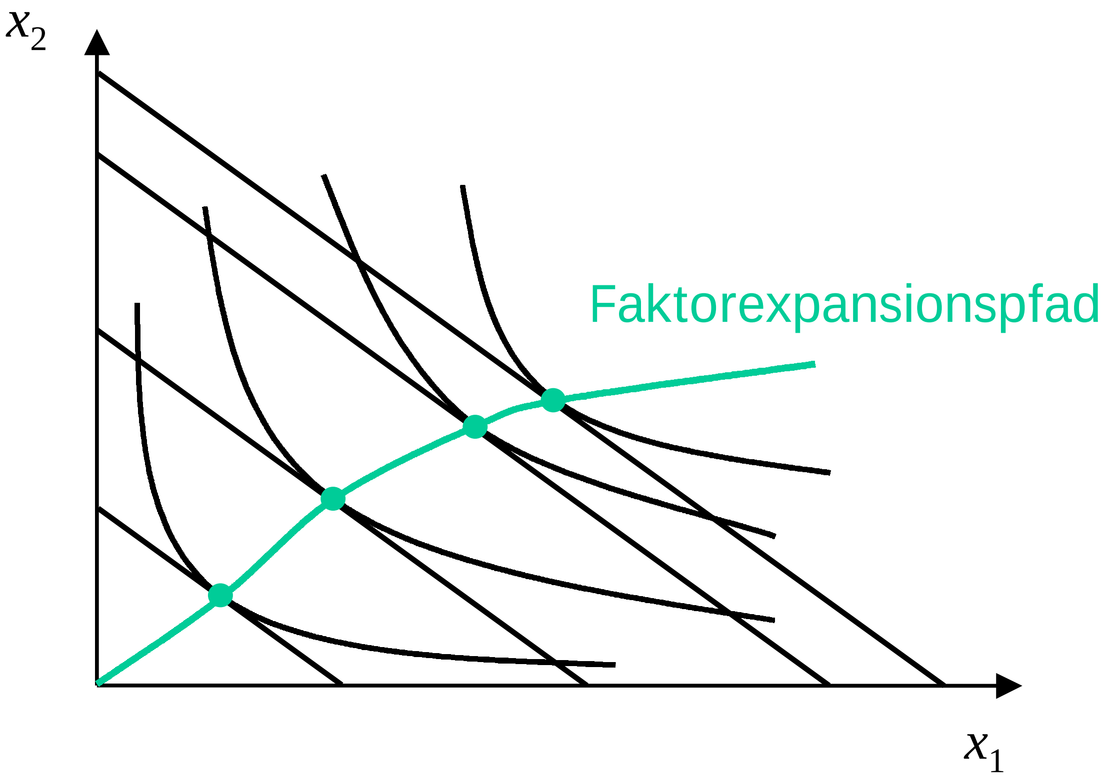
Der Preis des Inputs 1 steigt von w_1 auf w_1'



$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} \leq 0$ (gilt auch für mehr als zwei Inputs)

$\frac{\partial x_2}{\partial w_1} \geq 0$ (gilt nicht notwendigerweise bei drei oder mehr Inputs)

Erhöhung von y



Der **Faktorexpansionspfad** ist die Menge aller Inputbündel, die (bei konstanten Preisen) für irgendein Outputniveau kostenminimierend sind.

Bei inneren Lösungen $(x_1^* > 0, x_2^* > 0)$ gilt entlang dem Faktorexpansionspfad
TRS = - w_1/w_2.

Shephards Lemma

$\frac{\partial c(w_1,w_2,y)}{\partial w_i} = x_i(w_1,w_2,y)$ für alle Inputs i

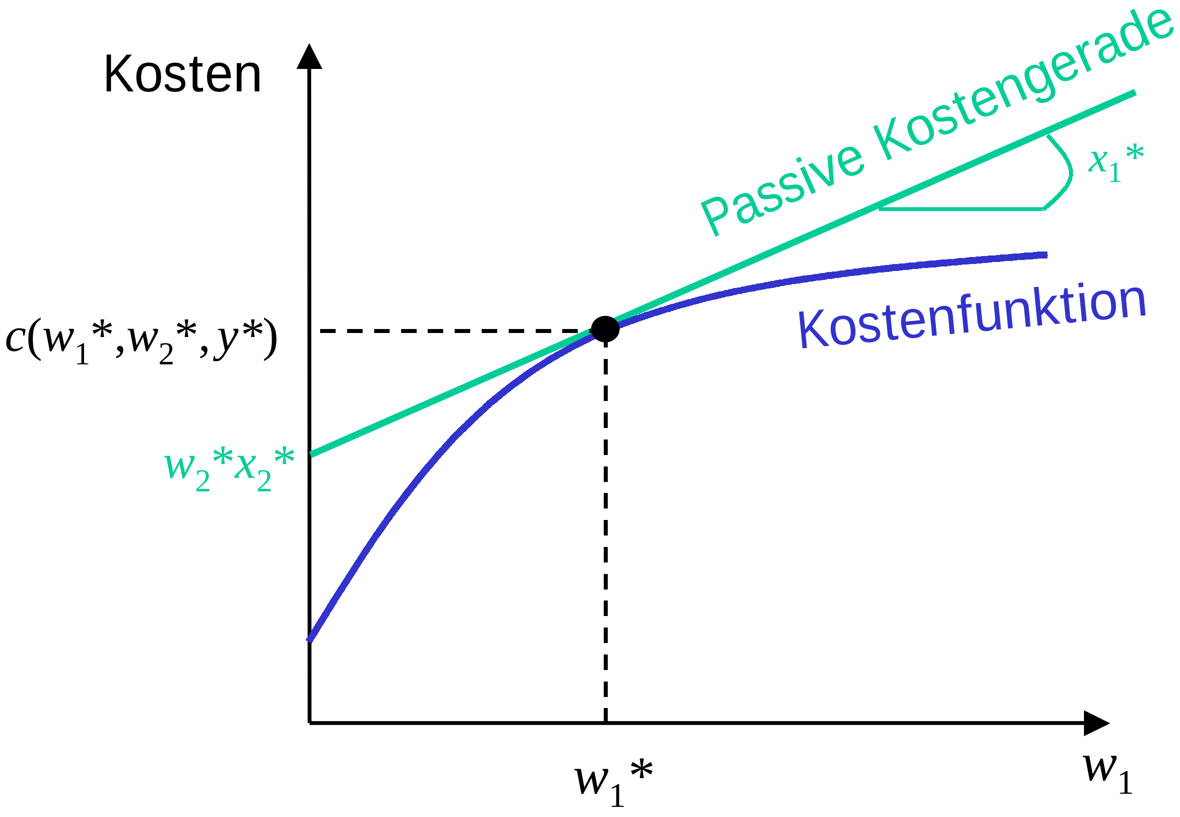
Begründung:

Es sei $(x_1{*}, x_2{*})$ die bei den Faktorpreisen $w_1{*}, w_2{*}$ zur Produktion von $y{*}$ kostenminimierende Inputkombination. Die **Passive Kostengerade**

$$C = w_1 x_1^* + w_2^* x_2^*$$

drückt aus, wie die Kosten auf eine Änderung des Inputpreises w_1 reagieren würden, wenn das Unternehmen seine Inputwahl **nicht** an die veränderten Preise **anpassen** würde.

Die durch die Kostenfunktion $c\left(w_1, w_2^*, y^*\right)$ ausgedrückten **optimalen** Kosten sind höchstens so groß.



Kostenfunktion und passive Kostengerade haben die gleiche Steigung.

Zusammenfassung

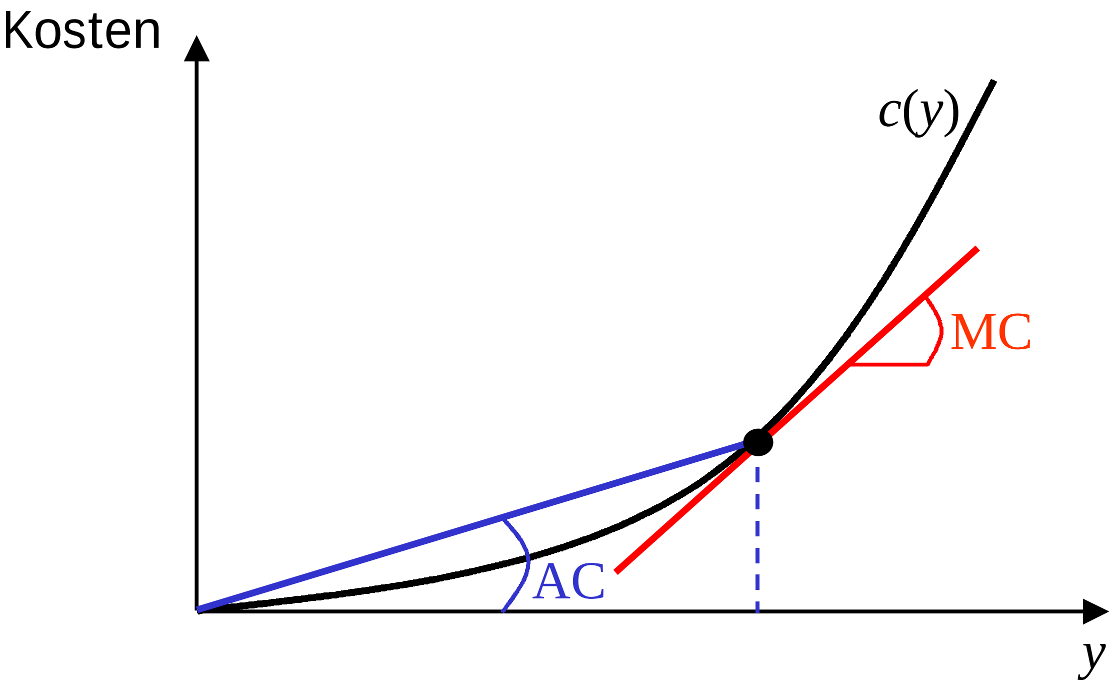
- Eine **Minimalkostenkombination** ist dadurch gekennzeichnet, daß die technische Rate der Substitution gleich dem negativen Faktorpreisverhältnis ist.
- Die **Kostenfunktion** gibt die minimalen Kosten der Produktion eines vorgegebenen Outputniveaus bei gegebenen Faktorpreisen an.
- Die **bedingte** Nachfragefunktion nach einem Faktor ist fallend im Preis dieses Faktors.
- Der **Faktorexpansionspfad** enthält die Minimalkostenkombinationen für alle möglichen Outputniveaus.

10 Kostenkurven

Wie verhält sich die Kostenfunktion in Abhängigkeit vom Output?

Durchschnittskosten $\mathrm{AC} = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}$

Grenzkosten $\mathrm{MC} = \frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y}$



Steigung der Durchschnittskosten

$$\frac{d\left(\frac{c(w,y)}{y}\right)}{dy}=\frac{\frac{\partial c(w,y)}{\partial y}\cdot y-c(w,y)}{y^2}$$

$$=\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{\partial c(w,y)}{\partial y}-\frac{c(w,y)}{y}\right)$$

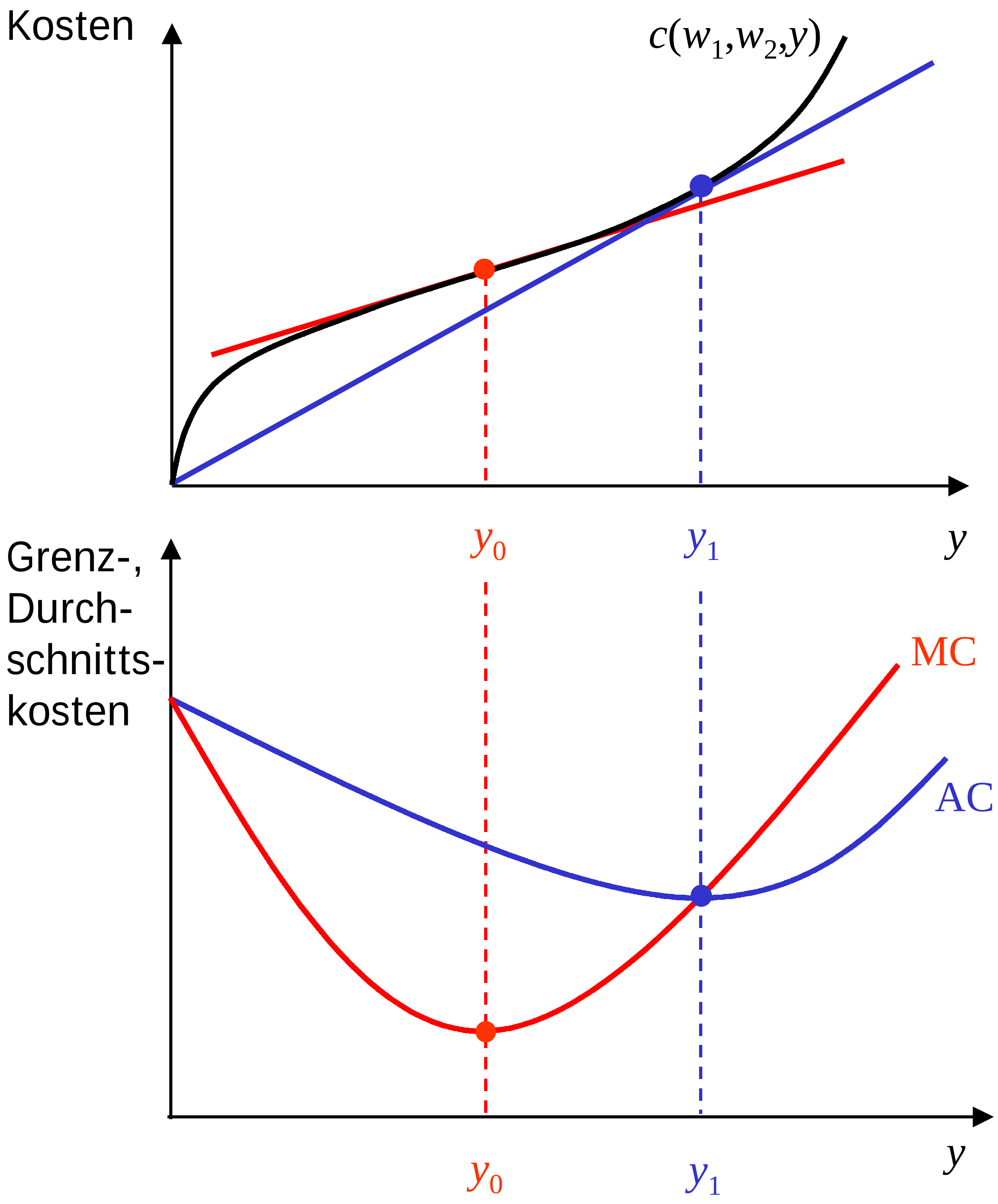
Die Durchschnittskosten $\left\{\begin{matrix}\text{steigen}\\ \text{fallen}\end{matrix}\right\}$

wenn die Grenzkosten $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$

als die Durchschnittskosten sind.

Wenn MC>AC gilt, dann ist die letzte produzierte Einheit teurer als der Durchschnitt der bisher produzierten Einheiten.

Beispiel:


Kosten
$c(w_1,w_2,y)$
y_0
y_1
y
Grenz-, Durchschnitts-kosten
MC
AC
y_0
y_1
y

Skalenerträge und Kostenfunktion

Wenn die Technologie k**onstante Skalenerträge** aufweist, dann kann die Kostenfunktion als

$$c(w_1, w_2, \mathrm{y}) = c(w_1, w_2, 1)\cdot y$$

geschrieben werden.

Einheitskostenfunktion $c(w_1,w_2,1)$

Begründung:

Wenn man das Produktionsverfahren, mit dem 1 Einheit am billigsten produziert werden kann, y-fach anwendet, erhält man y Einheiten.

Also kosten y Einheiten höchstens soviel wie y mal 1 Einheit.

Das Verfahren, mit dem man y Outputeinheiten am billigsten produziert, kann auf das $1/y$-fache verkleinert werden. Damit produziert man 1 Einheit des Outputs. Also kostet 1 Einheit höchstens soviel wie $1/y$-mal die Kosten zur Produktion von y Einheiten. Umgekehrt:

Die Produktion von y Einheiten kostet mindestens soviel wie y-mal die Produktion von 1 Einheit.

Schlußfolgerung:

Die Produktion von y Einheiten kostet genau soviel wie y-mal die Produktion von 1 Einheit.

$$\frac{\partial c(w,y)}{\partial y} = \frac{\partial [y \cdot c(w,1)]}{\partial y} = c(w,1)$$

$$\frac{c(w,y)}{y} = \frac{y \cdot c(w,1)}{y} = c(w,1)$$

Grenz- und Durchschnittskosten sind konstant und gleich, wenn die Technologie konstante Skalenerträge hat.

Bei **zunehmenden Skalenerträgen** benötigt das Unternehmen weniger als y-mal so viel von jedem Input, um y-mal so viel Output zu produzieren. Die Kosten erhöhen sich daher um weniger als das y-fache.

Bei **abnehmenden Skalenerträgen** wird zur Produktion eines y-fachen Outputs mehr als das y-fache der Inputs benötigt.

Schlußfolgerung:

Die Durchschnittskosten $\left\{\begin{array}{c}\text{sinken}\\ \text{steigen}\end{array}\right\}$

mit steigender Outputmenge, wenn die Technologie

$\left\{\begin{array}{c}\text{zunehmende}\\ \text{abnehmende}\end{array}\right\}$ Skalenerträge hat.

Kurzfristige Kostenfunktion

Die **kurzfristige Kostenfunktion** gibt die minimalen Kosten zur Erzeugung eines vorgegebenen Outputniveaus an, wobei lediglich die variablen Produktionsfaktoren angepaßt werden können.

Es gebe drei Inputs $i = 1,2,3.$ Die Menge des Inputs 3 sei kurzfristig auf $\bar{x}_3$ festgelegt.

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_1 x_2 + w_2 \bar{x}_3 \text{ u.d.B. } f(x_1, x_2, \bar{x}_3) = y.$$

Lösung:

Kurzfristige bedingte Faktornachfragefunktionen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_3), \\ x_2 &= x_2^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_3), \\ x_3 &= \bar{x}_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{STC} &= c_s(w_1, w_2, w_3, y, \bar{x}_3) \\ &= w_1 x_1^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_3) + w_2 x_2^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_3) + w_3 \bar{x}_3 \end{aligned}$$

Kurzfristige (Gesamt-) Kosten

$$\text{SVC} = w_1 x_1^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_3) + w_2 x_2^s(w_1, w_2, y, \bar{x}_3)$$

Kurzfristige variable Kosten

$$\text{SFC} = w_3 \bar{x}_3$$

Kurzfristige Fixkosten

Abgeleitete Kostenbegriffe:

$$\mathrm{SAC} = \frac{\mathrm{STC}}{y}$$ Kurzfristige Durchschnittskosten

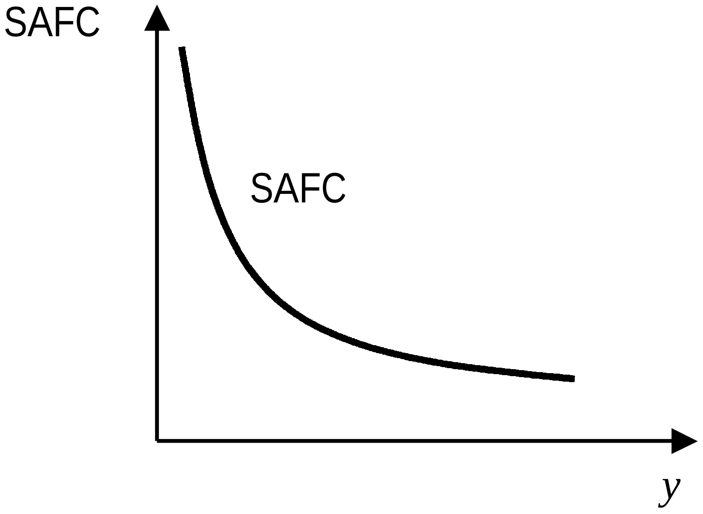
$$\mathrm{SMC} = \frac{\partial \mathrm{STC}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{SVC}}{\partial y}$$ Kurzfristige Grenzkosten

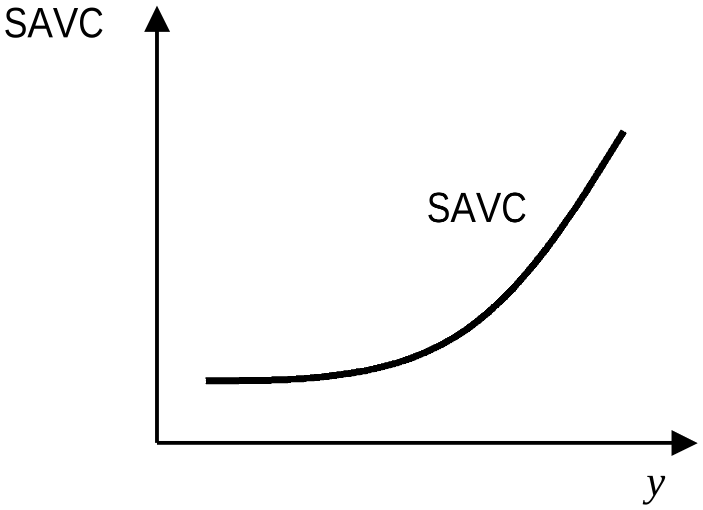
$$\mathrm{SAVC} = \frac{\mathrm{SVC}}{y}$$ Kurzfristige variable Durchschnittskosten

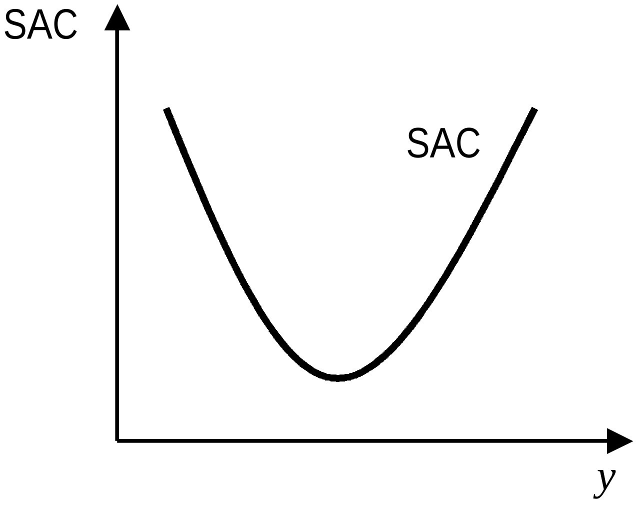
$$\mathrm{SAFC} = \frac{\mathrm{SFC}}{\mathrm{y}}$$ Kurzfristige fixe Durchschnittskosten

Standardverlauf der drei kurzfristigen Durchschnittskostenkurven:

- SAVC steigend wegen abnehmendem Grenzprodukt
- SAFC fallend, weil die Fixkosten auf mehr Outputeinheiten verteilt werden
- SAC U-förmig


SAFC
SAFC
y


SAVC
SAVC
y


SAC
SAC
y

Der geometrische Zusammenhang zwischen langfristigen und kurzfristigen Kosten

Der Faktor 3 sei fix.

Zu jedem Outputniveau y sei $x_3(y)$ die langfristig kostenminimierende Nachfrage.

Zum Outputniveau $y*$ ist langfristig die Faktornachfrage $x_3*=x_3(y*)$ optimal.

Kurzfristig sei die Einsatzmenge des Inputs 3 auf x_3* festgelegt.

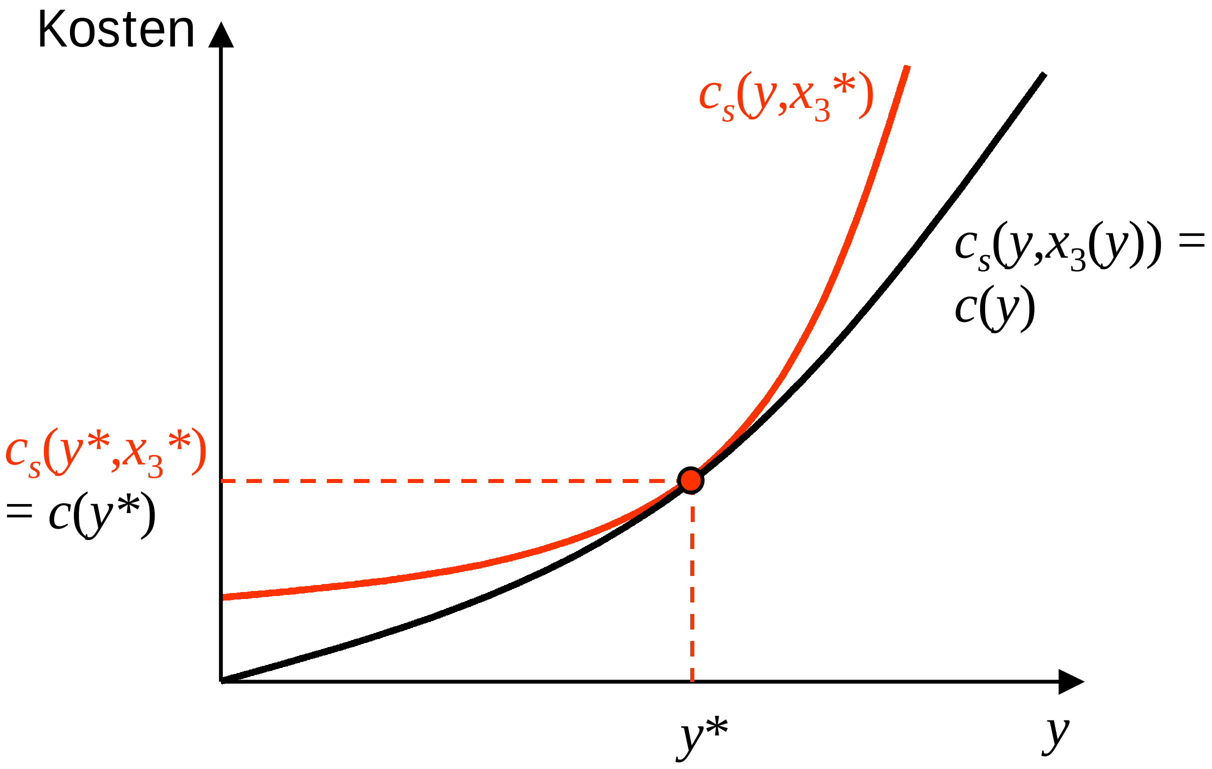
Die kurzfristigen Kosten sind $c_s(y,x_3*)$.

Wenn man genau $y*$ produzieren will, dann ist die kurzfristig festgelegte Faktormenge x_3* auch langfristig optimal, d.h. es gilt

$$c(y*) = c_s\left(y*, x_3 *\right) = c_s\left(y*, x_3(y*)\right)$$

Bei allen anderen Outputniveaus y sind die kurzfristigen Kosten mindestens so groß wie die langfristigen Kosten.

An der Stelle $y = y^*$ tangieren sich kurz- und langfristige Kosten.



An der Stelle $y = y^*$ gilt:

$$\frac{dc(y^*)}{dy} = \frac{\partial c_s(y^*, x_2^*)}{\partial y}$$

Auch die lang- und kurzfristigen Durchschnittskosten tangieren sich an der Stelle y^*.

Begründung:

$$\frac{d\ \mathrm{AC}(y)}{dy} = \frac{d\left[\frac{c(y)}{y}\right]}{dy} = \frac{1}{y}\left[\mathrm{MC}(y) - \mathrm{AC}(y)\right]$$

$$\frac{d\ \mathrm{SAC}(y)}{dy} = \frac{d\left[\frac{\mathrm{STC}(y)}{y}\right]}{dy} = \frac{1}{y}\left[\mathrm{SMC}(y) - \mathrm{SAC}(y)\right]$$

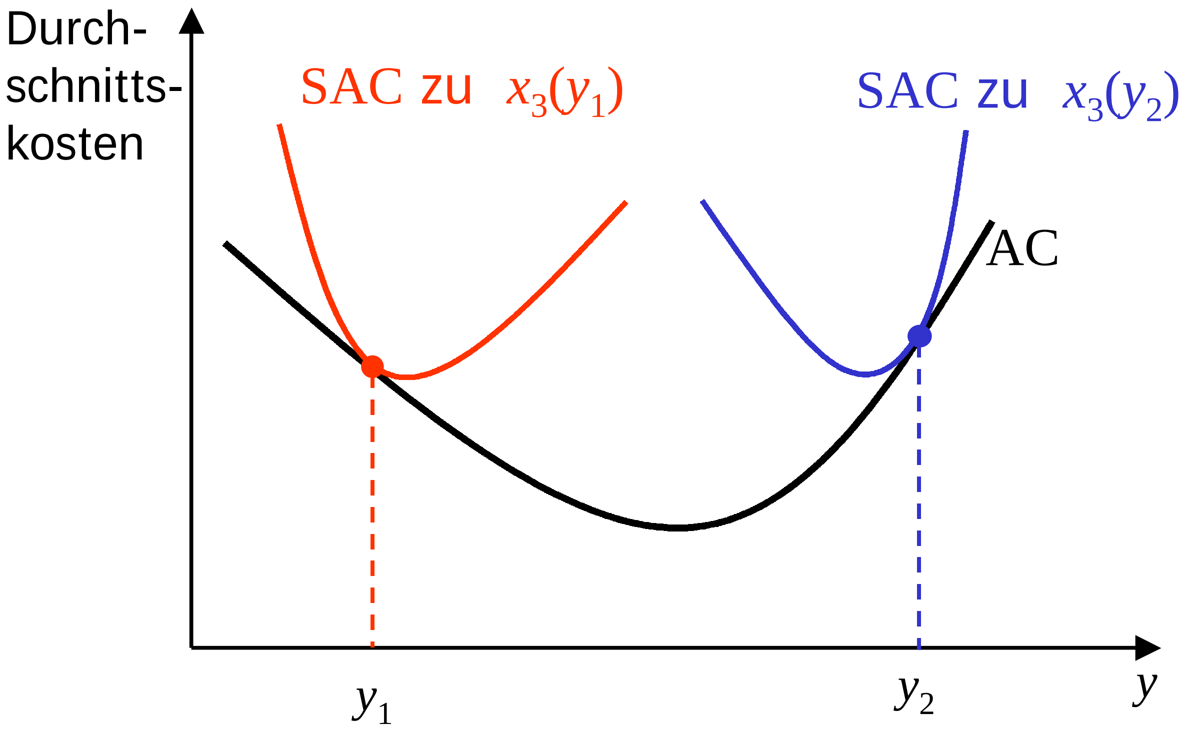
An der Stelle y^* gilt $c(y^*) = \mathrm{STC}(y^*)$, also auch $\mathrm{AC}(y^*) = \mathrm{SAC}(y^*)$.

Ebenso gilt an der Stelle y^*: $\mathrm{MC}(y^*) = \mathrm{SMC}(y^*)$.

Damit sind die Steigungen von AC und SAC an der Stelle y^* gleich.

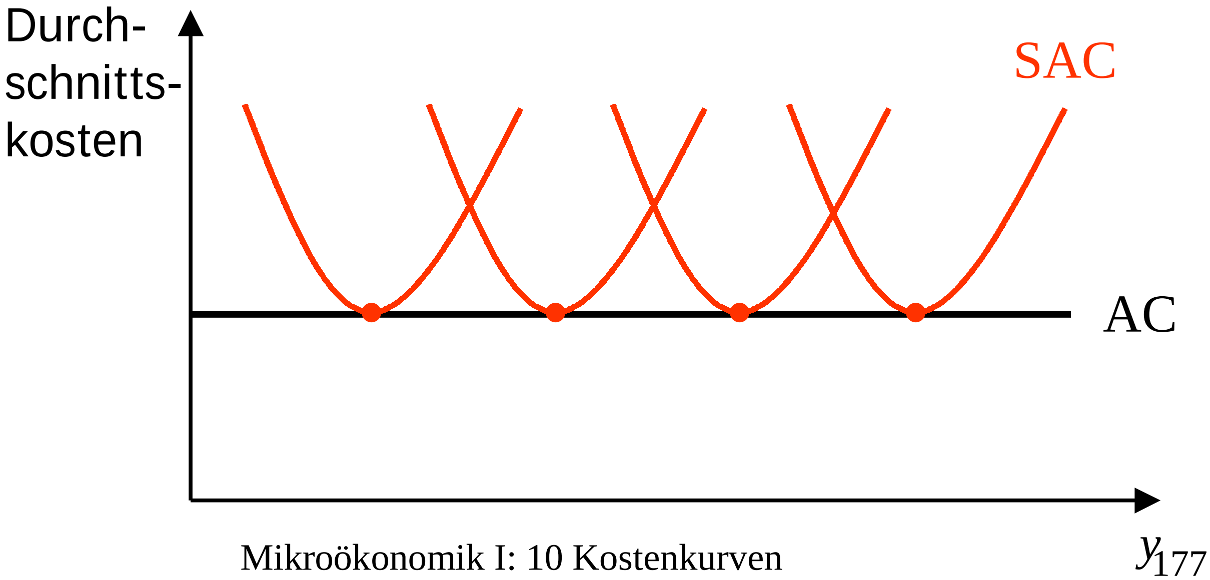
Die Kurve der langfristigen Durchschnittskosten ist die **Einhüllende** der Kurven der kurzfristigen Durchschnittskosten.

Beispiele:



Häufiger Fall:

langfristig konstante Skalenerträge, kurzfristig U-förmige Durchschnittskosten

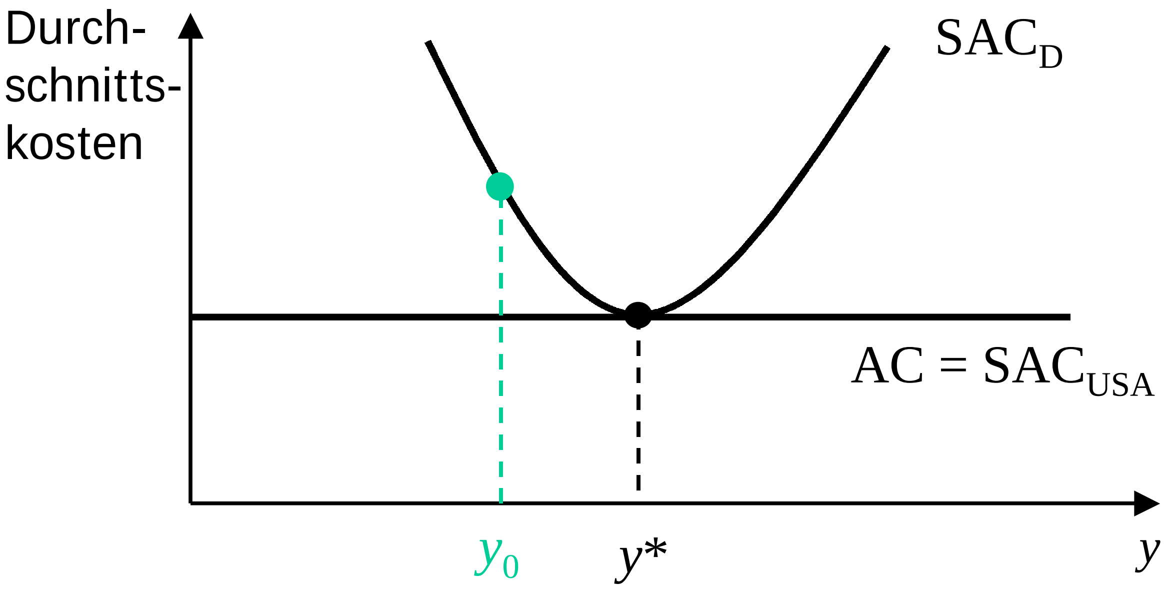


Anwendung: Der Wert der Flexibilität

Zwei Unternehmen haben die gleichen konstanten langfristigen Durchschnittskosten. Im deutschen Unternehmen ist die Zahl der Arbeitskräfte kurzfristig fix, im amerikanischen variabel.

Ausgangssituation: Beide produzieren y^* zu den langfristigen Durchschnittskosten.
Dann geht die Absatzmenge auf $y_0 < y^*$ zurück.

Das deutsche Unternehmen hat kurzfristig höhere Kosten.



Zusammenfassung

- Die Grenzkostenkurve liegt **unter** der Durchschnittskostenkurve, wenn die Durchschnittskosten fallen, und **darüber**, wenn sie steigen. Die Grenzkostenkurve schneidet deshalb die Durchschnittskostenkurve in deren Minimum.
- Steigende Skalenerträge implizieren fallende Durchschnittskosten, fallende Skalenerträge implizieren steigende Durchschnittskosten und konstante Skalenerträge implizieren konstante Durchschnittskosten.
- **Durchschnittliche Fixkosten** fallen immer mit steigendem Output, während **durchschnittliche variable Kosten** typischerweise steigen. Es ergibt sich eine U-förmige Durchschnittskostenkurve.
- Die langfristige Durchschnittskostenkurve ist die **Einhüllende** der Kurven der kurzfristigen Durchschnittskosten.

11 Der Wettbewerbsmarkt

Die Markttheorie kombiniert die Ergebnisse der Haushaltstheorie (Güternachfrage, Faktorangebot) und der Unternehmenstheorie (Güterangebot, Faktornachfrage) mit dem Ziel, Preise zu erklären.

Endogene Größen:

- Menge eines Gutes y
- Preis des Gutes p
- langfristig:
  Zahl der Anbieter m → Kapitel 12 in Mikro II

Exogene Größen:

- Preise aller anderen Güter, insbesondere der Inputs in die Produktion von y
- Kostenfunktionen
- Einkommen der Konsumenten
- kurzfristig: Zahl der Anbieter m
- Steuern

Jeder bietet die für den herrschenden Preis optimale Menge an bzw. fragt die optimale Menge nach.

→ Optimierungsprinzip

Es stellt sich ein Preis ein, bei dem jeder seinen Plan realisieren kann.

→ Gleichgewichtsprinzip

Preisnehmerverhalten

Wenn der Marktpreis p ist, ist die Nachfrage nach dem Output des Unternehmens

→ null, wenn es einen höheren Preis verlangt als p,

→ unendlich, wenn es einen niedrigeren Preis verlangt als p,

→ beliebig (zwischen 0 und ∞), wenn es auch p verlangt.

Es ist optimal für das Unternehmen, auch p zu verlangen.

Angebot eines Unternehmens bei vollkommener Konkurrenz

Angebotsfunktion und Produktionsfunktion

→ Kap. 8

Wenn die Kostenfunktion $c(y)$ bekannt ist, kann das optimale Angebot y eines Unternehmens ohne Rückgriff auf die Produktionsfunktion bestimmt werden.

Gewinnmaximierung

$$\max_{y} \quad py - c(y)$$

Notwendige und hinreichende Bedingungen für ein inneres Gewinnmaximum mit $y > 0$:

Preis = Grenzkosten

$$p = c'(y)$$

$$c''(y) \geq 0$$

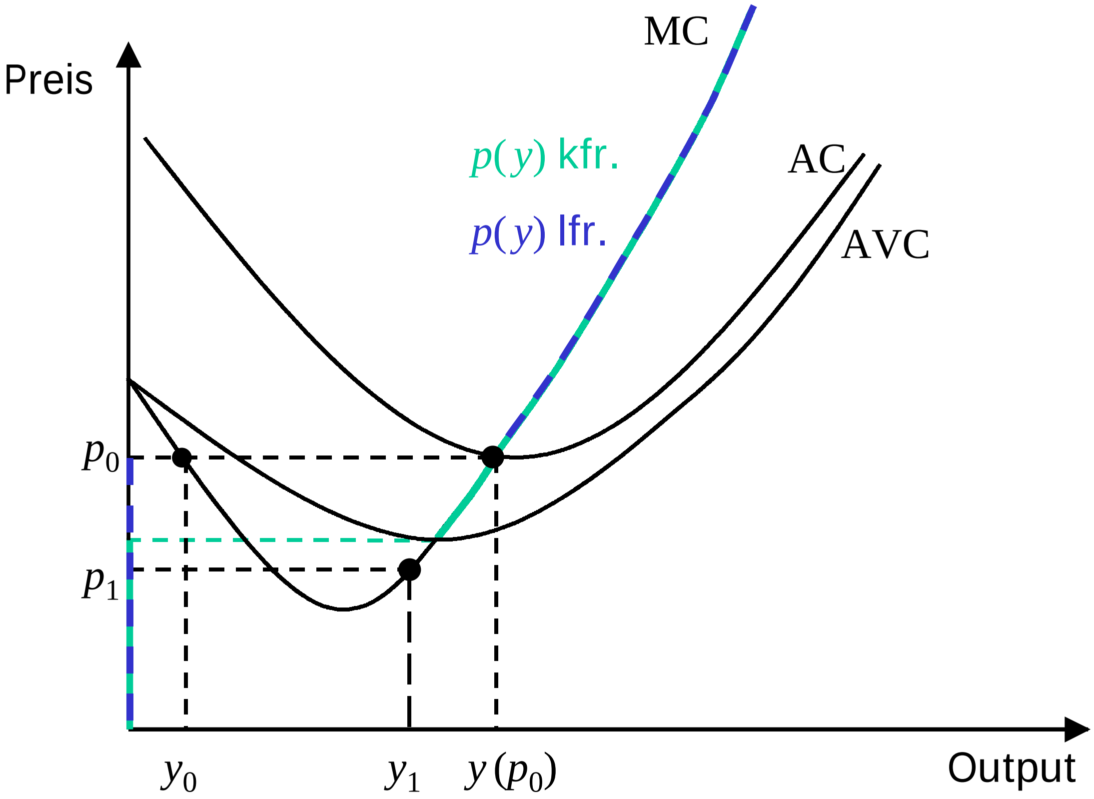
$$p > AVC(y)$$

$y(p)$ Angebotsfunktion

$p(y)$ inverse Angebotsfunktion

Diese beiden Funktionen drücken das optimale Verhalten des Unternehmens aus.

$p(y)$ ist der Preis, der am Markt herrschen muß, damit das Unternehmen y Einheiten anbietet.



AVC	durchschnittliche variable Kosten
MC	Grenzkosten = $c'(y)$
AC	(totale) Durchschnittskosten

FC	Fixkosten
VC	variable Kosten

An y_0 gilt zwar $c'(y_0) = p_0$, aber eine Erhöhung oder Senkung der Menge erhöht den Gewinn, da $c''(y_0) < 0$.

An y_1 ist $p_1 < \mathrm{AVC}(y_1)$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 < \frac{\mathrm{VC}(y_1)}{y_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 y_1 < \mathrm{VC}(y_1)$$

Wenn y_1 Einheiten produziert werden, deckt der Erlös nicht einmal die variablen Kosten. Wenn die Produktion eingestellt wird, ist der Gewinn

$$p_1 \cdot 0 - \mathrm{VC}(0) - \mathrm{FC} = -\mathrm{FC}.$$

Mit y_1 ist der Gewinn

$$p_1 y_1 - \mathrm{VC}(y_1) - \mathrm{FC} < -\mathrm{FC}.$$

Das optimale Angebot ist 0, weil so der Verlust geringer ist.

Kurzfristig ist das Angebot positiv, wenn der Preis mindestens so groß ist wie das Minimum der variablen Durchschnittskosten.

Langfristig müssen die Fixkosten nur dann bezahlt werden, wenn auch produziert wird. Deshalb ist das Angebot langfristig nur positiv, wenn der Preis mindestens so groß ist wie das Minimum der totalen Durchschnittskosten.

Die kurzfristige (langfristige) inverse Angebotsfunktion $p(y)$ besteht aus dem über der Kurve der variablen (totalen) Durchschnittskosten verlaufenden Teil der Grenzkostenkurve und der Preis-Achse von 0 bis zum Minimum der variablen (totalen) Durchschnittskosten.

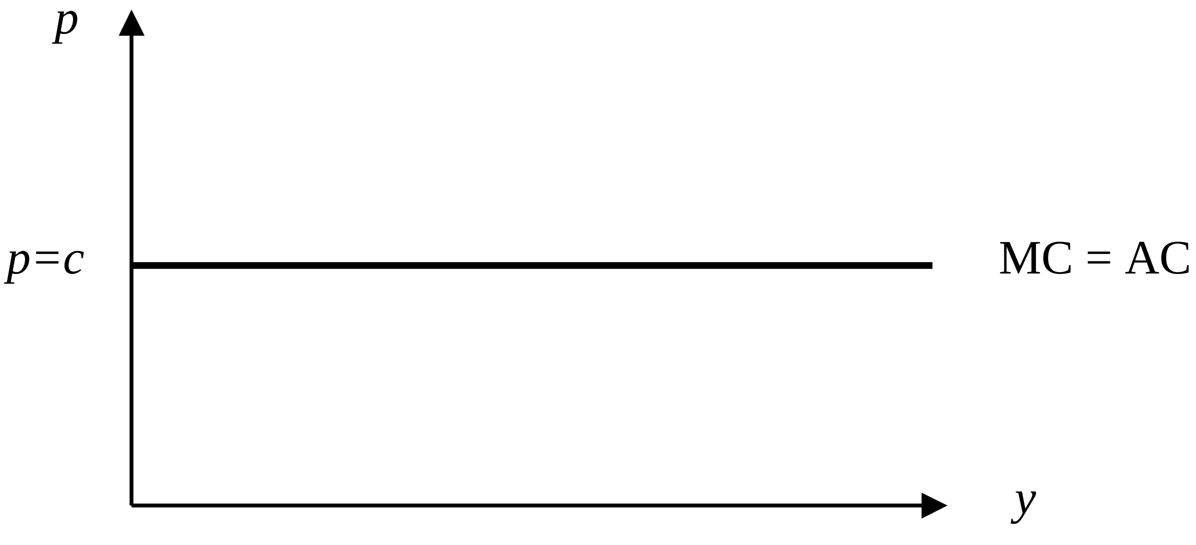
Angebotsfunktion bei konstanten Skalenerträgen

$$c'(y) = \frac{c(y)}{y} = c$$

$p > c \Rightarrow$ Eine Erhöhung des Angebots erhöht den Gewinn.

$p < c \Rightarrow$ Das optimale Angebot ist 0, da jedes $y > 0$ zu Verlust führt.

$p = c \Rightarrow$ Jedes Angebot $y \geq 0$ führt zum selben Gewinn, nämlich 0.



Die inverse Angebotsfunktion ist bei konstanten Skalenerträgen waagerecht.

Kurzfristiges Marktangebot

$y_i(p)$	Angebotsfunktion des Unternehmens i = 1, 2,...,m
$S(p) = \sum_{i=1}^{m} y_i(p)$	Marktangebotsfunktion

Die Zahl der Unternehmen ist kurzfristig fest vorgegeben.

Marktnachfrage

$x_i(p)$	Nachfrage des Nachfragers i = 1, ..., n
$D(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p)$	Marktnachfragefunktion

Bestimmung der Nachfragefunktionen:

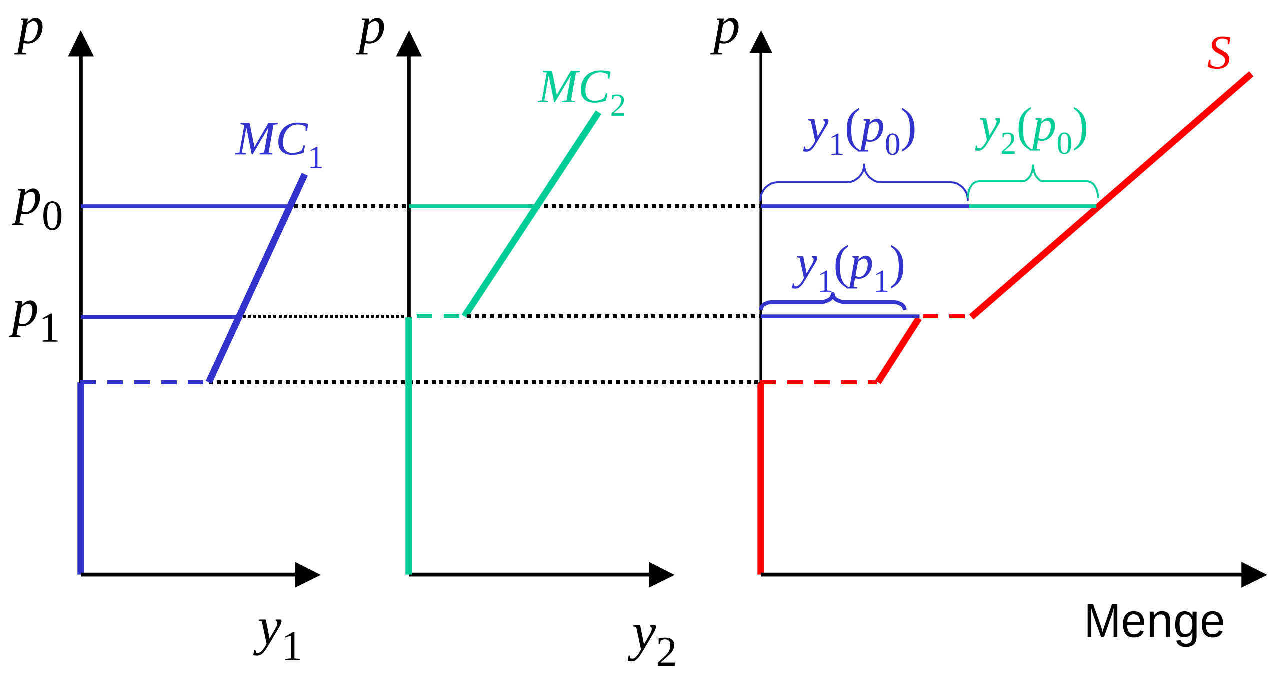
Konsumgut

→ Haushaltstheorie, Kap. 4

Zwischenprodukt

→ Faktornachfragefunktion, Kap. 8

Graphische Bestimmung der Marktangebotskurve durch horizontale Aggregation der Angebotskurven der Unternehmen



Unternehmen 1

Unternehmen 2

Markt

S Marktangebotskurve

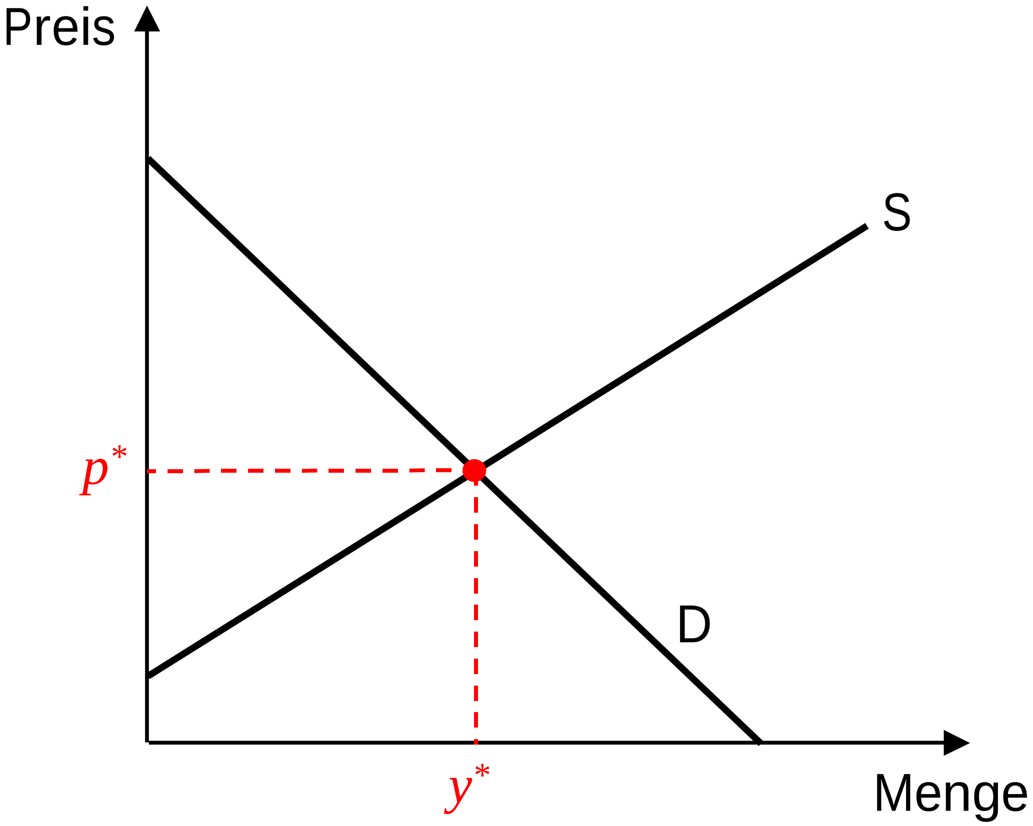
Die Marktnachfrage wird ebenso durch horizontale Aggregation der Nachfragekurven der Konsumenten bestimmt.

Wettbewerbsgleichgewicht

Gleichgewichtspreis p^*

Gleichgewichtsmenge y^*

$$D(p^*) = S(p^*) = y^*$$



Wohlfahrt

Auf dem Markt werde die Menge y_0 zum Preis p_0 gehandelt.

Gibt es eine andere Allokation, die gesamtwirtschaftlich vorzuziehen ist?

Die gesamtwirtschaftliche „Qualität“ der Allokation wird mit „Wohlfahrt“ bezeichnet.
Ein Maß für die Wohlfahrt in diesem Modell ist die Summe aus Konsumenten- und Produzentenrente.

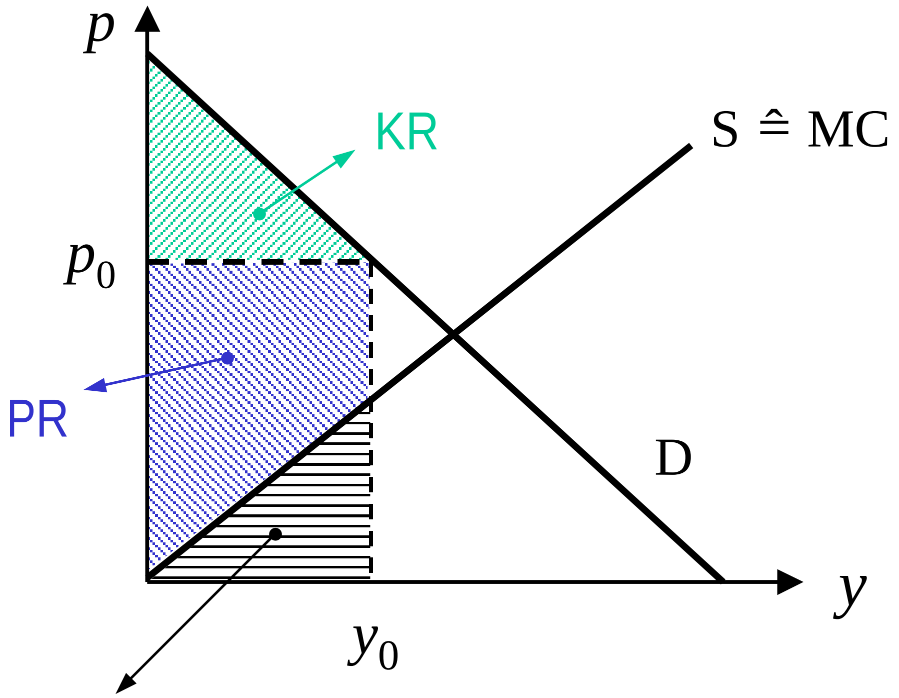
Konsumenten- und Produzentenrente

Konsumentenrente =

aggregierte Differenz zwischen Zahlungsbereitschaft und Preis

Produzentenrente =

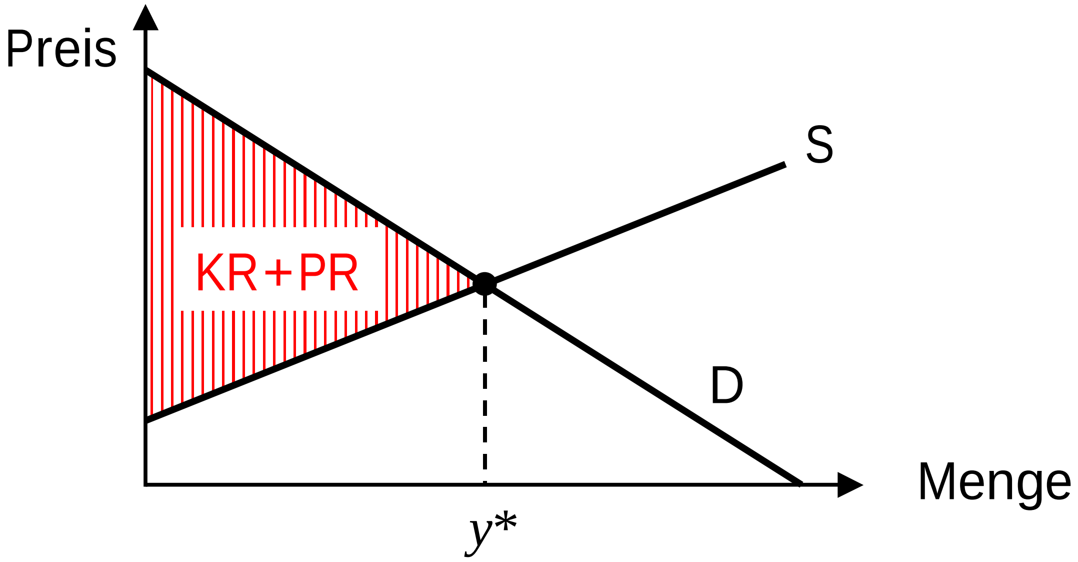
aggregierte Differenz zwischen Preis und Grenzkosten der Anbieter



variable Kosten

PR = Erlös - VC = Gewinn + Fixkosten

Die Allokation des Konkurrenzgleichgewichts maximiert die Summe aus KR und PR.



Komparative Statik

Wie ändern sich der Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge, wenn sich eine exogene Größe ändert.

Beispiele für exogene Größen:

- Inputpreise
- Einkommen der Konsumenten
- Steuersatz

Mengensteuer

Der Staat erhält t Euro pro Einheit des Gutes, die verkauft wird.

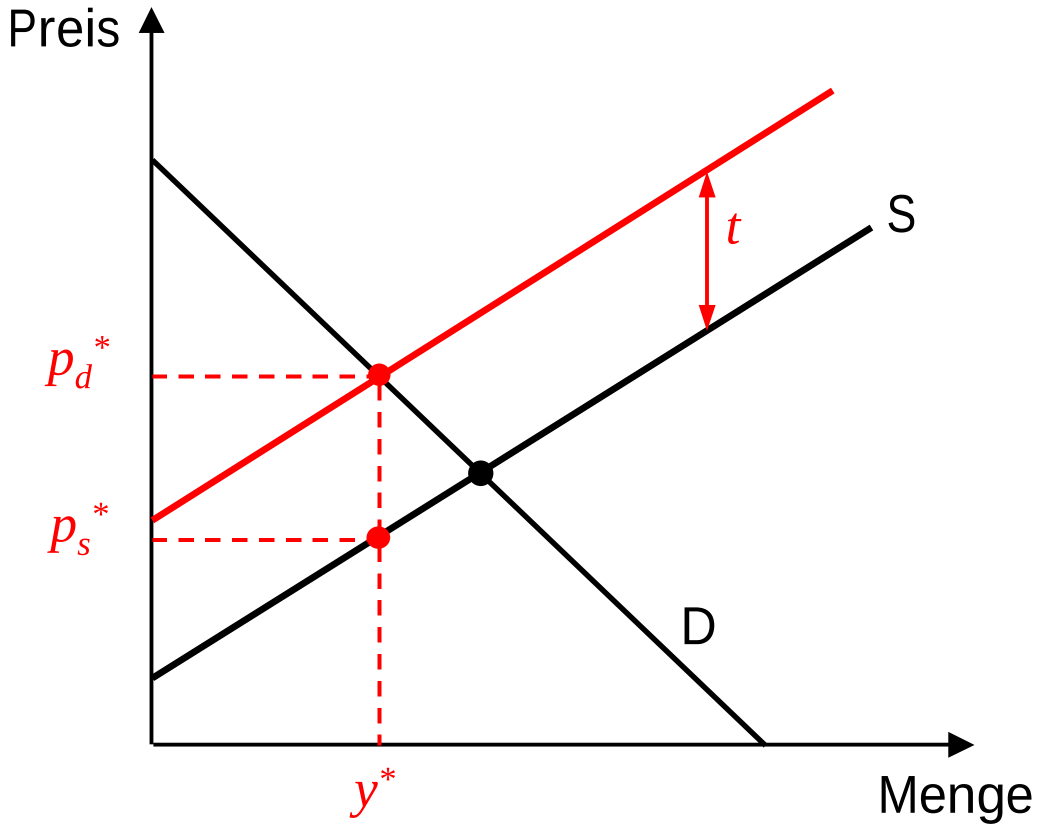
Beispiele: Mineralölsteuer, Tabaksteuer

Verkäuferpreis, Produzentenpreis p_s

Käuferpreis, Konsumentenpreis p_d

$$p_d = p_s + t$$

Die Verkäufer bezahlen die Steuer.



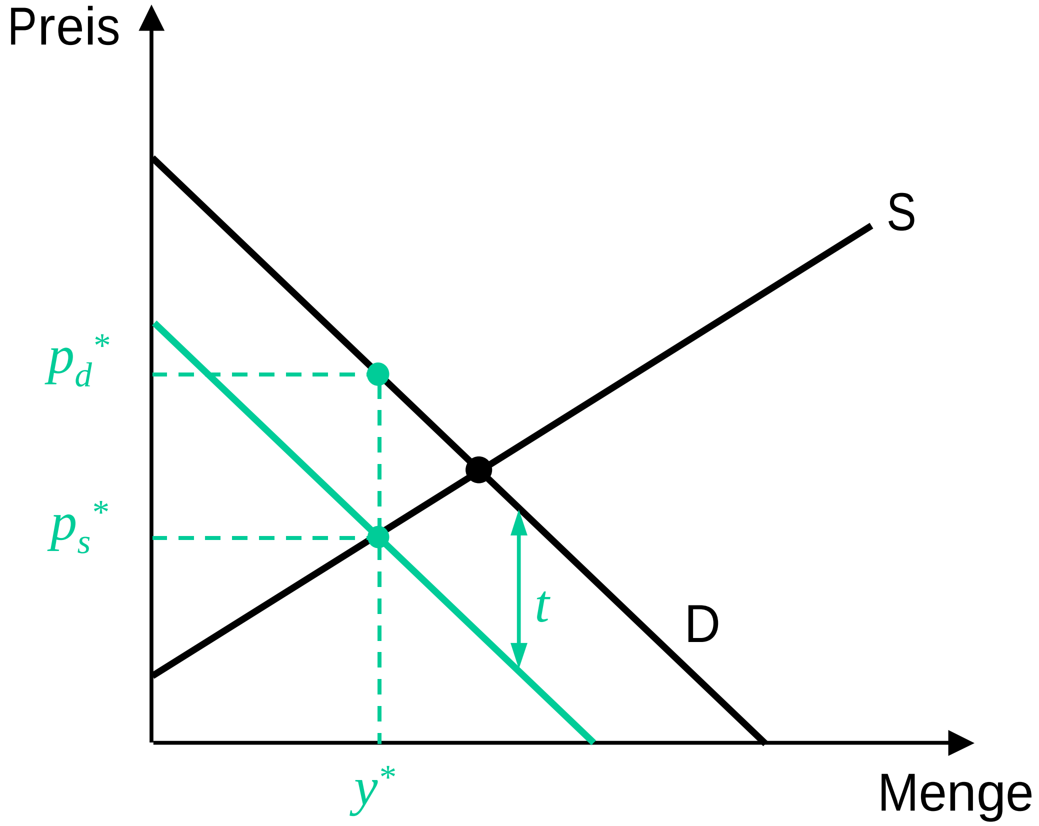
y^* sinkt

$p_d{}^*$ steigt

$p_s{}^*$ sinkt.

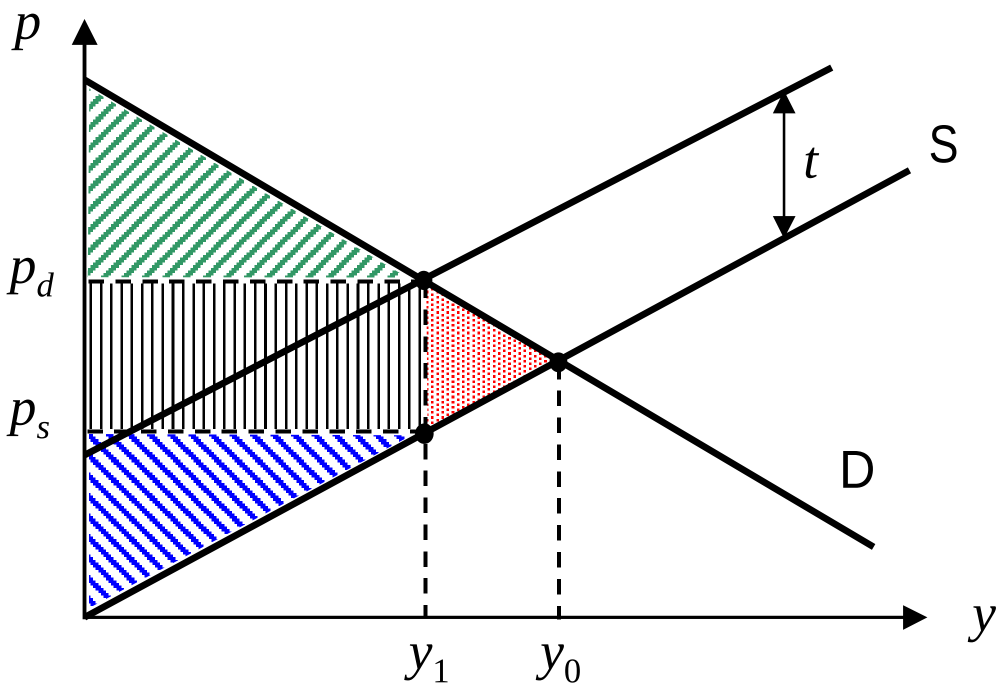
Die Käufer tragen einen Teil der Steuerlast. Die Steuer wird teilweise auf die Käufer **überwälzt**.

Die Käufer bezahlen die Steuer.



y^*, p_d^* und p_s^* sind genau so groß wie im Falle der Steuerzahlung durch die Anbieter. Die Überwälzung der Steuer hängt nicht davon ab, wer sie bezahlt.

Wohlfahrtswirkung der Mengensteuer



Durch Steuer geht die Menge von y_0 auf y_1 zurück.

▨ KR nach Einführung der Steuer

▧ PR nach Einführung der Steuer

▥ Steueraufkommen

▶ Wohlfahrtsverlust

Zusammenfassung

- Die langfristige kurzfristige inverse Angebotskurve eines Unternehmens ist der über dem Minimum der totalen variablen Durchschnittskosten verlaufende Teil der Grenzkostenkurve.
- Die Marktangebotskurve ergibt sich durch horizontale Aggregation der Angebotskurven aller Unternehmen.
- Im Wettbewerbsgleichgewicht ist die Summe aus Konsumentenrente und Produzentenrente maximal.
- Wenn die Angebotskurve steigend und die Nachfragekurve fallend verlaufen, dann steigt durch eine Mengensteuer der Konsumentenpreis und der Produzentenpreis fällt.
- Wenn eine Steuer auf ein Konsumgut erhoben wird, entsteht ein Wohlfahrtsverlust.