

SCHÄTZUNG VON DURCHMESSERVERTEILUNGEN

Joachim Saborowski

Abteilung für Forstliche Biometrie und Informatik
 Universität Göttingen
 Büsgenweg 4
 37077 Göttingen

SUMMARY

This paper gives a description of a simulation study in five forest stands, where three different estimators (empirical distribution function, kernel estimation, Weibull-estimation) were used to estimate the diameter distributions, based on systematic k-tree samples. Total sample sizes varied from $N=18$ trees up to nearly 200, each realized by different cluster sizes k and numbers of clusters n . After the introduction and description of the data base some technical details are discussed, which concern ML-estimation of Weibull-parameters, stability and interpretation of simulation results. The next chapters summarize and interpret the results and give rough minimum sample sizes for each stand and different cluster sizes to achieve a maximum absolute difference between Weibull estimation and true distribution function not larger than 0.2 with a probability of 95%.

1. EINFÜHRUNG

Die Bedeutung der Durchmeßerverteilung z.B. als Basis für die Sortimentenberechnung, Ausgangssituation für Bestandeswachstumsmodelle sowie für weitere wissenschaftliche und praktische Anwendungsbereiche ist hinlänglich bekannt und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Für die Schätzung der Durchmeßerverteilung eines Bestandes stellt sich aber doch die Frage nach dem zu leistenden Erhebungsaufwand bzw. Stichprobenumfang. Diese Frage stand auch am Anfang dieser Untersuchung. Bei näherer Betrachtung ergeben sich jedoch zwangsläufig eine Reihe weiterer Fragen und Präzisierungen, die wir zunächst erörtern wollen.

Liegt eine Stichprobe von Durchmeßern x_1, \dots, x_n aus einem Bestand vor, so kann seine wahre Durchmeßerverteilung in jedem Fall einfach durch die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe geschätzt werden, die jedoch Sprünge mit einer Mindesthöhe von $1/n$ aufweist. Da die wahre Verteilung bei hinreichend großen Beständen eine sehr viel glattere Form besitzt, ist es deshalb naheliegend, von einer Glättung der Stichprobenverteilungsfunktion eine bessere Annäherung an die wahre Verteilung zu erwarten. Hierfür bieten sich sowohl parametrische als auch nichtparametrische Verfahren an. In einer umfangreichen Simulationstudie ist

jedoch aus Zeitgründen eine Beschränkung auf wenige wesentliche Verfahren notwendig. Als nichtparametrisches Verfahren soll hier ein sogenannter Kernschätzer verwendet werden und als parametrisches Modell die besonders in der englischsprachigen Literatur häufig verwendete Weibull-Verteilung.

Der Kernschätzer wird je nach Fenstertyp und -breite eine mehr oder weniger stark geglättete Verteilungsdichte erzeugen, aus der sich durch numerische Integration eine stetige Verteilungsfunktion ergibt. Hier wurden Dreieckskerne

$$k(x) = \begin{cases} 1 - |x| & : |x| < 1 \\ 0 & : \text{else} \end{cases}$$

verwendet, die die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{n \cdot b} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - x_i}{b}\right)$$

ergeben. Die Fensterbreite b wurde nach der Faustregel

$$b = 0.9 \cdot \min\left(\sigma, \frac{R}{1.34}\right) \cdot n^{-\frac{1}{5}}$$

von SILVERMAN 1986 in Abhängigkeit von der Standardabweichung σ und dem Interquartilrange R festgelegt.

Die Schätzung der drei Parameter der Weibull-Verteilung sollte nach der Maximum-Likelihood-Methode erfolgen.

Drei Schätzverfahren stehen also zum Vergleich

- a) empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe
- b) Kernschätzer (nichtparametrisch)
- c) Anpaßung einer dreiparametrischen Weibullverteilung an die Stichprobe

Eine weitere wesentliche Einflußgröße ist die Art der Stichprobenauswahl. In diesem Punkt ist die vorliegende Untersuchung noch unvollständig. Bisher wurden berücksichtigt

- a) systematische k -Baum-Stichproben
- b) zufällige k -Baum-Stichproben
- c) einfache Zufallsauswahl von Einzelbäumen

Probekreise mit festem Radius sollen in künftigen Simulationsläufen ergänzt werden. Nicht zuletzt hängt die Genauigkeit einer Schätzung aber auch von dem

vorliegenden Bestand, seiner wahren Durchmeßerverteilung und von der räumlichen Verteilung der Durchmeßer im Bestand ab. Es ist bekannt, daß man bei der Schätzung von Varianzen durch den für einfache Zufallsstichproben erwartungstreuen Schätzer

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{(n)})^2$$

mit einem mehr oder weniger starken systematischen Fehler (Bias) rechnen muß, wenn geklumpte Stichproben erhoben werden (COCHRAN 1977, S.238, GARCIA 1991, SMELKO 1993). Im Fall der klassischen Klumpenstichprobe, wenn also der Bestand in N nicht überlappende Teilflächen (Klumpen) mit je k Bäumen zerlegt wird, aus denen n Teilflächen zufällig ausgewählt werden, ist dieser Bias durch

$$\text{bias}S^2 = \frac{(N-n)(k-1)[\sigma_{in}^2 - \sigma_{zw}^2]}{(Nk-1)(nk-1)} \stackrel{(N \text{ large})}{\approx} \frac{(k-1)[\sigma_{in}^2 - \sigma_{zw}^2]}{k(nk-1)}$$

gegeben.

$$\sigma_{in}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{N(k-1)} \quad \sigma_{zw}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

sind dabei die Varianzen innerhalb und zwischen den N Klumpen (\bar{x}_i Klumpenmittelwert und \bar{x} Mittelwert je Baum).

Nun ist aber S^2 für größere Stichprobenumfänge praktisch die Varianz der empirischen Verteilungsfunktion, so daß sich dieser Bias auch auf die Schätzung der Verteilung insgesamt auswirken muß. Dazu kommen speziell bei k -Baum-Stichproben (zum Probekreiszentrum werden die k nächsten Nachbarbäume ausgewählt) auch noch unterschiedliche Auswahlwahrscheinlichkeiten für die Bäume eines Bestandes, da in der Regel dickere Bäume auch einen größeren Standraum beanspruchen als dünnere und damit häufiger als Nachbarn von Stichprobenpunkten ausgewählt werden. Dies kann sowohl die Mittelwert- als auch die Varianzschätzung systematisch verfälschen.

2. VERWENDETES DATENMATERIAL

Glücklicherweise standen für diese Studie fünf unterschiedliche Bestände mit den Koordinaten und dem Durchmeßer jedes ihrer Einzelbäume zur Verfügung. Eine kurze Beschreibung ist in Tabelle 1 wiedergegeben.

Tabelle 1: Bestandesparameter

$$\text{maxdif} = \max \left| F(x) - \hat{F}_{\text{Weibull}}(x) \right|, \text{VK: Variationskoeffizient}$$

Name	Stammz	Fläche (ha)	\bar{d}	VK(%)	Weibull	maxdif
Smelko PL5	3405	6.0	27.9	27	approx.	0.02
van Laar	5379	6.9	23.2	22	approx.	0.03
Denzlingen	1648	5.1	36.9	30	approx.	0.04
Smelko PL2	1675	3.1	22.2	57	nein	0.06
Illinois	1521	6.2	27.8	68	nein	0.07

Prof. van Laar, Prof. Smelko und Prof. Schöpfer sei an dieser Stelle für die Bereitstellung dieser Daten sehr herzlich gedankt. Die Untersuchung wäre ohne sie in dieser Form nicht möglich gewesen.

Die ersten drei Bestände der Tabelle lassen sich sehr gut durch Weibull-Verteilungen beschreiben, während es sich bei den beiden letzten um Verteilungsfunktionen mit zwei Wendepunkten und einem steilen Anlauf handelt. Ihre Häufigkeitsdichten sind demzufolge zunächst abfallend mit einem weiteren Modalwert im oberen Durchmeßbereich. *maxdif* ist die maximale absolute Differenz zwischen der wahren Verteilungsfunktion und einer durch Maximum-Likelihood-Schätzung angepaßten Weibull-Verteilung. Der relativ hohe Wert für den Bestand Denzlingen ist dadurch zu erklären, daß in diesem Bestand als einzigem nur auf ganze *cm* gerundete Durchmeßer vorliegen, die natürlicherweise zu größeren Sprüngen der Verteilungsfunktion führen. Die Weibull-Anpaßung ist dennoch sehr gut.

3. TECHNISCHE DETAILS

Die Parameter α , β und γ der Weibull-Verteilung (VAN LAAR 1991)

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right)^\gamma} & : x \geq \alpha \\ 0 & : x < \alpha \end{cases}$$

$$F(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right)^\gamma} & : x \geq \alpha \\ 0 & : x < \alpha \end{cases}$$

wurden durch die iterative Lösung der beiden Maximum-Likelihood-Gleichungen mit Anfangswerten für α und γ bestimmt, woraus sich zusammen mit den Stichprobendaten

$$\beta = \left[\left(\frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

ergibt. Für $\gamma \leq 1$ (abfallende Dichte), was häufig bei den beiden Beständen Smelko PL2 und Illinois auftrat, funktioniert diese ML-Schätzung nicht, da die Likelihood-Funktion in diesem Fall kein endliches Maximum mit verschwindender Ableitung besitzt. Sie wächst gegen unendlich, wenn sich der Lageparameter α dem kleinsten Durchmesser der Stichprobe nähert. Deshalb wurde für jede Stichprobe auch eine sogenannte zweiparametrische ML-Schätzung durchgeführt, wobei α ein fester Wert knapp unterhalb des kleinsten Durchmessers zugewiesen wurde. Die bessere der beiden Anpassungen, gemessen an der maximalen absoluten Differenz zur Verteilungsfunktion der Stichprobe, wurde weiterverwendet.

Eine weitere Frage ist, wie die Anpassungsgüte einer geschätzten Verteilungsfunktion beurteilt werden soll. Hier haben wir uns auch für die maximale absolute Differenz (MAD) zwischen geschätzter und wahrer Verteilungsfunktion entschieden, da dieses Maß unmittelbar eine leicht interpretierbare Deutung zuläßt. Es gibt nämlich den größten absoluten Fehler an, der auftreten kann, wenn man die geschätzte Verteilung verwendet, um den Anteil der Bäume des Bestandes zu schätzen, die unter- oder auch oberhalb eines vorgegebenen Durchmessers liegen.

Alle Varianten der Stichprobenauswahl wurden 400 mal wiederholt, und für jede dieser Wiederholungen wurden alle drei Schätzverfahren angewendet. Für jedes Schätzverfahren und jede Stichprobenvariante ergaben sich so je 400 MADs. Zur Auswertung wurden das 95%-Quantil dieser 400 MADs zur Beschreibung der Größenordnung extremer Abweichungen sowie das 50%-Quantil (Median) zur Beschreibung mittlerer Abweichungen herangezogen.

4. ERGEBNISSE

Alle Abbildungen beziehen sich auf systematische k -Baum-Stichproben sowie einfache Zufallsstichproben von Einzelbäumen, wobei im letzteren Fall nur die Ergebnisse der Weibull-Anpassung dargestellt sind, im ersteren die aller drei Schätzverfahren. Zur Beschreibung der Ergebnisse beginnen wir mit dem Bestand Denzlingen in Abbildung 1. Zu jeder Gesamtanzahl N von Stichprobenbäumen wurden unterschiedliche Klumpengrößen realisiert. Z.B. wurden Stichproben mit je $N=96$ Bäumen durch 16 Probekreise mit je $k=6$ Bäumen realisiert aber auch durch 8 mal 12, 4 mal 24 und 2 mal 48 Bäume. Ein Gesamtstichprobenumfang von 99 Bäumen wurde nur durch 33 Probekreise mit je 3 Bäumen realisiert. Die Variante einfache Zufallsstichprobe mit Weibull-Anpassung wurde entsprechend oft

mit identischem N unabhängig wiederholt und zeigt, welche Schwankungen durch die Beschränkung auf 400 Replikationen zu erwarten sind. An dieser Variabilität müßen die Vergleiche zwischen den übrigen Verfahren gemessen werden.

Zunächst fällt auf, daß die 95%-Quantile der MADs, wie man es auch erwarten sollte, mit wachsendem Stichprobenumfang N geringer, die Schätzungen also besser werden. Interessanter ist die klare Reihenfolge der drei Schätzverfahren für kleine und mittlere Stichprobenumfänge. Die Schätzung durch die Weibull-Verteilung liefert immer die besten Ergebnisse, gefolgt vom Kernschätzer und der empirischen Verteilungsfunktion. Auch dies muß insofern nicht überraschen als die wahre Verteilung ja auch sehr gut durch eine Weibull-Verteilung beschrieben wird. Für die ganz großen Stichprobenumfänge zeigen alle drei nur geringfügige Unterschiede. Entsprechendes gilt auch für die Bestände van Laar (Abbildung 3) und PL5 (Abbildung 2).

Weiterhin erkennt man einen sehr deutlichen Effekt der Klumpengröße. Die besten Ergebnisse werden mit einfachen Zufallsstichproben erzielt. Mit wachsender Baumzahl je Probekreis werden die Ergebnisse schlechter. Die übrigen beiden Weibull-Bestände (Abbildungen 2 und 3) zeigen auch einen deutlichen Klumpeneffekt, aber mit nicht so klarer Tendenz. Auch dort werden jedoch die besten Resultate mit einfachen Zufallsstichproben erzielt.

Die 50%-Quantile verhalten sich ganz analog, sie sind aber nur etwa halb so groß wie die 95%-Quantile (Abbildungen 4 und 5).

Kommen wir nun zu den beiden zweigipfligen Beständen PL2 und Illinois, wo wir vom Kernschätzer bessere Schätzungen erwarteten als von der Weibull-Verteilung. Aber selbst in diesen Beständen ist die Weibull-Schätzung offensichtlich das beste Verfahren für Baumanzahlen bis etwa $N=70$. Für größere Stichprobenumfänge ist dies nicht mehr der Fall, die Unterschiede zu den beiden anderen Verfahren sind aber nur gering.

Ein Effekt der Probekreisgröße ist hier, gemessen an den 95%-Quantilen, sehr viel weniger ausgeprägt oder auch garnicht vorhanden (Abbildung 4). Lediglich die 50%-Quantile zeigen eine geringfügige Verringerung mit wachsender Klumpengröße (Abbildung 5). Hier sind also im Unterschied zu den drei ersten Beständen mit größeren Probeflächen gleich gute oder sogar etwas bessere Schätzungen der Durchmeßerverteilung zu erwarten als mit kleineren. Eindeutig am bestenschneidet aber auch wieder die einfache Zufallsstichprobe ab.

Abb. 1:

95%-Quantile von $\max|F_{\text{est}}(x)-F(x)|$
(Bestand: Denzlingen)

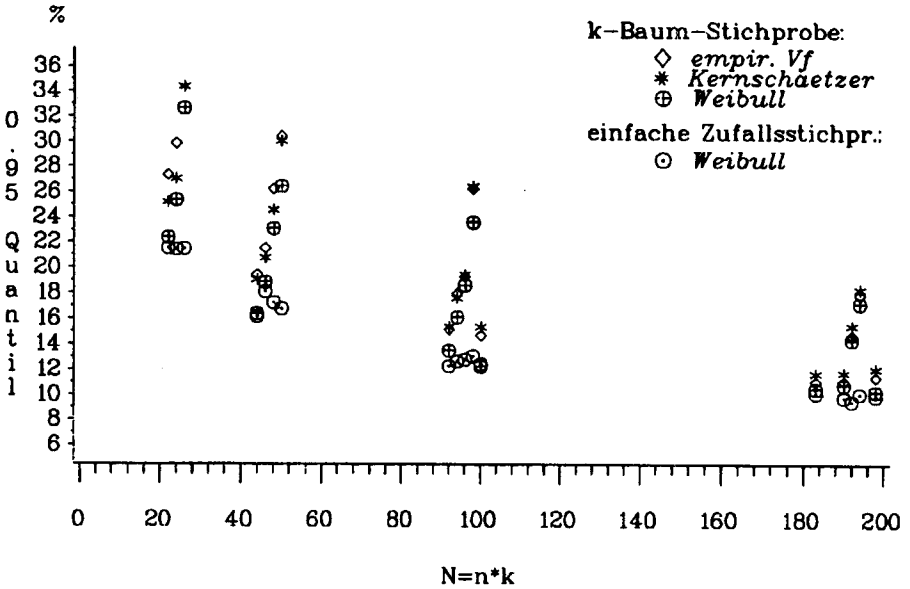


Abb. 2:

95%-Quantile von $\max|F_{\text{est}}(x)-F(x)|$
(Bestand: Smelko PL5)

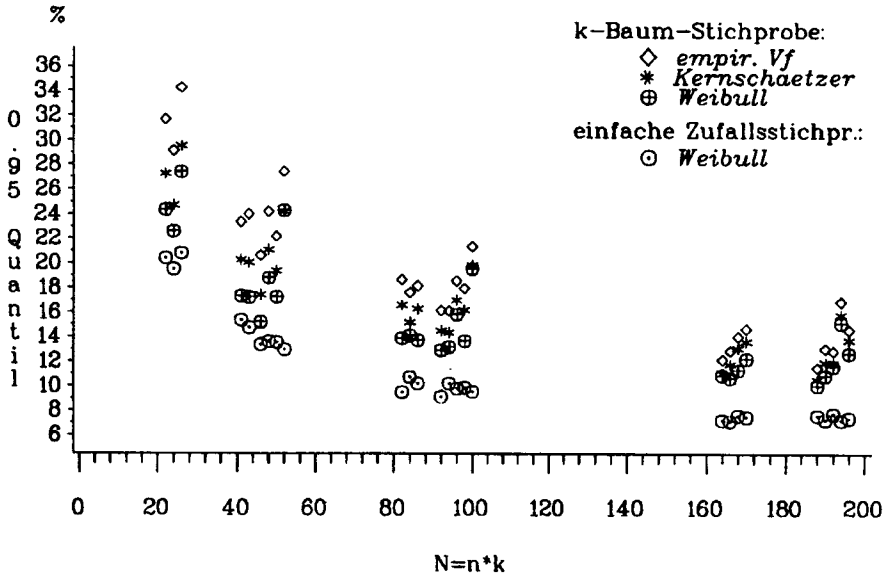


Abb. 3:

95%-Quantile von $\max|F_est(x)-F(x)|$
(Bestand: van Laar)

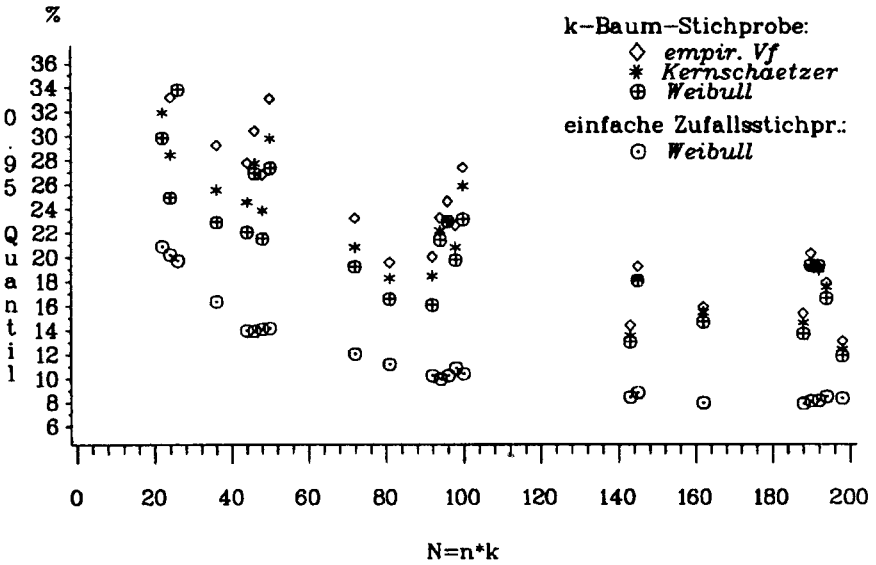


Abb. 4:

95%-Quantile von $\max|F_est(x)-F(x)|$
(Bestand: Illinois)

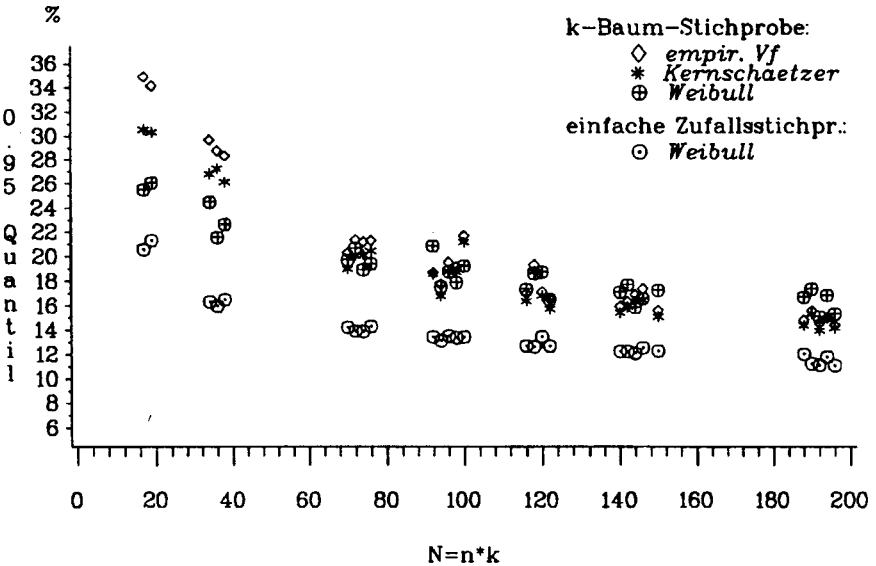
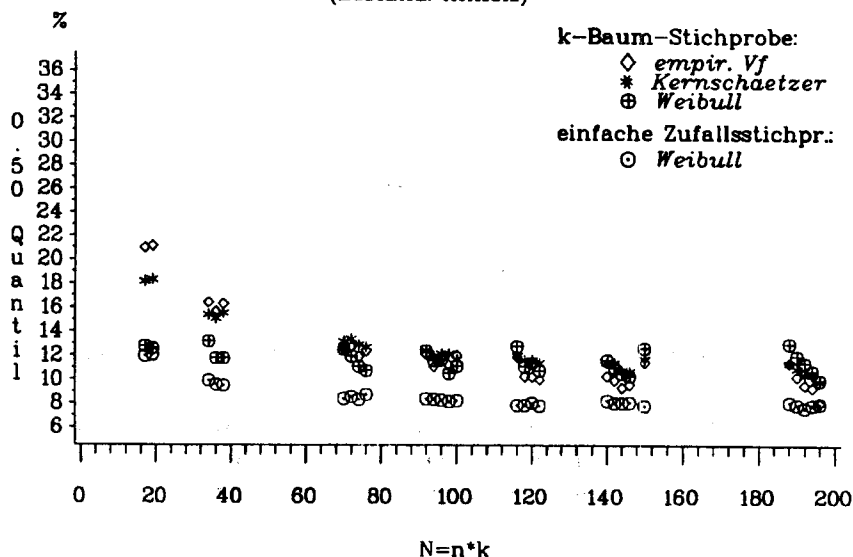


Abb. 5

50%-Quantile von $\max|F_{\text{est}}(x) - F(x)|$
(Bestand: Illinois)



5. NOTWENDIGE STICHPROBENUMFÄNGE

Wie die bisherigen Ausführungen zeigen hängt die Genauigkeit der Schätzung einer Bestandesdurchmeßerverteilung von vielen Faktoren ab und dies zum Teil ganz erheblich. Insbesondere die räumliche Verteilung von Bäumen und Durchmeßern im Bestand ist aber vor einer Stichprobenauswahl in der Praxis nicht bekannt. Weiterhin muß für die Festlegung eines notwendigen oder optimalen Stichprobenumfangs genauso wie bei Testverfahren oder Konfidenzintervallschätzungen eine Genauigkeitsanforderung gestellt werden, die erfüllt werden soll. Auch dies ist nicht immer einfach und läßt durchaus Spielraum für Diskussionen, gerade auch unter Praktikern.

Um hier etwas konkreter zu werden, fordern wir einmal, daß in 95% aller denkbaren Stichproben die maximale absolute Differenz zwischen geschätzter und wahrer Verteilungsfunktion nicht größer als 0.2 sein soll. Wir ziehen also in den Abbildungen mit den 95%-Quantilen eine waagerechte Linie durch die 20%-Markierung der y-Achse und prüfen, ab welchen Stichprobenumfängen diese Linie bei unterschiedlichen Klumpengrößen unterschritten wird. Dabei wird linear zwischen den Simulationsergebnissen interpoliert. Da sich die Weibullschätzung in allen Beständen als sinnvollstes Verfahren erwiesen hat, beschränken wir uns auf dieses Verfahren. Das Resultat ist Tabelle 2.

Tabelle 2:

Notwendiger Stichprobenumfang für die Schätzung der Durchmeßerverteilung mit Weibull und systematischen k -Baum-Stichproben

	k	3	6	12
Genauigkeitsanforderung:	Smelko PL5	35	35	40
$q_{0.95}(\text{MAD}) = 0.2$	van Laar	60	80	120
	Denzlingen	35	45	75
	Smelko PL2	80	55	55
	Illinois	75	75	75

Mit etwa 80 Stichprobenbäumen wird die geforderte Genauigkeit in allen Beständen sowohl durch 3-Baum- als auch durch 6-Baum-Stichproben mindestens erreicht. Mit einer Ausnahme trifft dies auch für 12-Baum-Stichproben zu, die aber wenig praxisrelevant sind. Allerdings würde in zwei der vorliegenden Bestände auch etwa die Hälfte, d.h. 45 Bäume ausreichend sein. Die mittleren MADs (50%-Quantile) liegen mit den angegebenen Baumanzahlen um etwa die Hälfte niedriger, also bei ungefähr 10%.

Zur Höhe der geforderten Genauigkeit ist weiterhin zu sagen, daß noch höhere Anforderungen an die 95%-Quantile, wie z.B. 15%, nur mit erheblich höheren Stichprobenumfängen erfüllt werden können, wie die Abbildungen 1 bis 4 zeigen.

Bis hierhin wurden nur die Ergebnisse für systematische k -Baum-Stichproben besprochen, im Fall zufällig ausgewählter Probeflächenmittelpunkte sind die Ergebnisse jedoch vergleichbar gut oder etwas schlechter. Einzige Ausnahme ist van Laars Bestand, wo bessere Ergebnisse als bei systematischer Auswahl erzielt werden. Die Tendenz zubeßeren Resultaten mit kleineren Probeflächen ist bei zufälliger Auswahl aber auch für die Bestände vanLaar und PL5 klar zu erkennen.

6. DISKUSSION

Die bisherigen Ergebnisse zeigen, daß durch die Frage nach dem notwendigen Stichprobenumfang zur Schätzung von Durchmeßerverteilungen eigentlich mehr neue Fragen aufgeworfen als Antworten gegeben werden. Offensichtlich ist der erhebliche Einfluß der Bestandsstruktur auf die Schätzergebnisse. Unklar ist bislang, inwieweit die gegenüber zufälligen Einzelbaumauswahlen immer schlechteren Ergebnisse der k -Baum-Stichproben durch ungleiche Auswahlwahrscheinlichkeiten und/oder durch Klumpeneffekte erklärt werden können. Zur Beantwortung dieser Frage kann die noch zu ergänzende Simulation von Probekreisen mit festem Radius beitragen, da bei diesen von gleichen Auswahlwahrscheinlichkeiten für alle

Einzelbäume des Bestandes ausgegangen werden kann. Sie laßen dadurch auch bessere Ergebnisse, d.h. geringere Stichprobenumfänge erwarten.

LITERATUR:

Cochran, W.G. (1977): Sampling techniques. Wiley, New York

Garcia, O. (1993): What is a diameter distribution? IUFRO Symposium, Tsukuba, Japan

van Laar, A. (1991): Forest biometry. Reproduction Department, University of Stellenbosch

Silverman, B.W. (1986): Density estimation for statistics and data analysis. Chapman and Hall, London

Smelko, S. (1993): Die räumliche Bestandsstruktur und die Genauigkeit der Waldzustandserfassung durch verschiedene Stichprobenverfahren. presented at the meeting of: Sektion Forstliche Biometrie und Informatik, Deutscher Verband forstlicher Forschungsanstalten, Freising