TESTKLAUSUR (Juli 2003)

ZAHLENTHEORIE

1. **(a)** Formuliere das quadratische Reziprozitätsgesetz samt Ergänzungssätze für das Jacobisymbol.

(b) Es seien n, m natürliche Zahlen, so dass $p = 3n + 4m^2$ eine Primzahl ist. Beweise, dass p Quadratischer Rest modulo n und n Quadratischer Rest modulo p ist.

(c) Zeige: Ist $p > 2$ eine Primzahl, so ist $p \equiv 1 \pmod 3$ genau dann, wenn es zu p teilerfremde natürliche Zahlen x, y, mit $3x^2 + 4y^2 \equiv 0 \pmod p$ gibt.

2. **(a)** Es sei p eine Primzahl und a, b, c, d, u, v seien ganze Zahlen.
Zeige, dass das Gleichungssystem

$$u \equiv ax + by \pmod p$$
$$v \equiv cx + dy \pmod p$$

genau dann eine modulo p eindeutig bestimmte Lösung x, y besitzt, wenn $ad - bc \not\equiv 0 \pmod p$.

(b) Es seien p und q zwei verschiedene Primzahlen und a, b, c, d, u, v seien ganze Zahlen. Finde (mit Beweis) ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, dass das Gleichungssystem

$$u \equiv ax + by \pmod{pq}$$
$$v \equiv cx + dy \pmod{pq}$$

eine modulo pq eindeutig bestimmte Lösung x, y besitzt.

ALGEBRA

3. Es sei $p(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeige, dass p irreduzibel ist.

(b) Zeige: Ist u eine Nullstelle von p, so auch $u^2 - 2$.

(c) Es seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von p und $K = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$. Zeige, dass K eine Galoiserweiterung von Q ist und bestimme $[K : \mathbb{Q}]$ sowie $Gal(K/\mathbb{Q})$.

(d) Bestimme alle Zwischenkörper Z von $K/\mathbb{Q}$.

(e) Bestimme ein primitives Element für die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$, d.h. suche ein $\alpha \in K$ mit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

4. Es sei k ein endlicher Körper mit $q = p^d$ Elementen (p Primzahl).
Es sei $Gl(2, k) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right); a, b, c, d \in k, ad - bc \neq 0\}$.

(a) Bestimme die Ordnung von $Gl(2, k)$.

(b) Bestimme die Ordnung von $B = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right); a, b, d \in k, ad \neq 0\}$.

(c) Zeige, dass $U = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right); b \in k\}$ ein Normalteiler von B ist.

(d) Ist B eine auflösbare Gruppe?

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

5. Betrachte die Differentialgleichung

$$(*) \qquad y' = (x-1)y^2 + (1-2x)y + x.$$

(a) Bestimme sämtliche Lösungen von $(*)$.
Hinweis: Versuche den Ansatz $z = y - 1$.

(b) Berechne die Lösung von $(*)$ unter der Anfangsbedingung $y(1) = 2$. Wo ist diese definiert?

(c) i) Berechne die Lösung von $(*)$ unter der Anfangsbedingung $y(1) = 3$.
ii) Zeige: Für ihren Definitionsbereich D gilt $D \subset (0,3)$ aber $D \supset (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

6. **(a)** Finde alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems.

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

(b) Betrachte das inhomogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 3e^{2x} \\ y_2' &= -4y_1 + 2y_2 + xe^{2x}. \end{aligned}$$

Was ist seine Lösung unter der Anfangsbedingung $y_1(0) = 0, y_2(0) = -\frac{11}{4}$?

FUNKTIONENTHEORIE

7. **(a)** Formuliere die Cauchysche Integralformel.

(b) Es sei f eine in $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ holomorphe Funktion mit der Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Es gelte die Ungleichung $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ in $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Beweise für $0 < r < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|a_n| \leq \frac{1}{r^n(1-r)}$.

(c) Beweise $|a_n| \leq (1 + \frac{1}{n})^n (n+1)$ und folgere $|a_n| < e \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

8. **(a)** Definiere den Begriff "Isolierte Singularität" und klassifiziere die verschiedenen Arten von isolierten Singularitäten.

(b) Formuliere den Identitätssatz.

(c) Es sei f eine in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion, aber nicht die Nullfunktion. Es gebe eine Nullfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, $z_n \neq 0$, mit $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f im Nullpunkt eine wesentliche Singularität besitzt.