TESTKLAUSUR (Februar 2003)

ZAHLENTHEORIE

1. Es seien p, q Primzahlen.

(a) Definiere den Begriff “Primitivwurzel $\pmod p$”.

(b) Ist $p \not\equiv 1 \pmod q$, so hat die Gleichung $x^q \equiv a \pmod p$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$ genau eine Lösung $\pmod p$.

(c) Ist $p \equiv 1 \pmod q$ und $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\equiv 0 \pmod p$, so hat die Gleichung $x^q \equiv a \pmod p$ entweder keine Lösung $\pmod p$ oder q inkongruente Lösungen $\pmod p$.

(d) Ist $p \equiv 1 \pmod q$, $q \neq 2$ und $\frac{p-1}{q} < 2q-2$, so gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$, so daß die Gleichung $x^q + y^q \equiv a \pmod p$ keine Lösung besitzt.

(e) Sei $p = 13$ und $q = 3$. Zeige, daß die Gleichung $x^q + y^q \equiv a \pmod p$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$ eine Lösung besitzt.

2. **(a)** Es sei p eine Primzahl. Zeige,daß die Gleichung $x^2 + 10x + 31 \equiv 0 \pmod p$ genau dann eine Lösung besitzt, wenn $p = 2$, $p = 3$ oder wenn p zu einer der Zahlen $1, 5, 7, 11 \pmod{24}$ kongruent ist.

(b) Löse die Gleichung $x^2 + 10x + 31 \equiv 0 \pmod{11}$.

ALGEBRA

3. Sei $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{F}_7[X]$.

(a) Zeige, dass f irreduzibel über $\mathbb{F}_7$ ist.

(b) Sei α eine Wurzel von f. Zeige, dass $\mathbb{F}_7(\alpha) = \mathbb{F}_{7^3}$ ist.
(Hinweise: $\mathbb{F}_{7^3} = \{b \in \bar{\mathbb{F}}_7 : \; b^{7^3} - b = 0\}$. Was ist der Grad $[\mathbb{F}_{7^3} : \mathbb{F}_7]$?)

(c) Ist $\mathbb{F}_7(\alpha)$ Galois über $\mathbb{F}_7$ und was ist die Galoisgruppe?

(d) Gib eine Primitivwurzel $\omega = a\alpha^2 + b\alpha + c, \; a, b, c \in \mathbb{F}_7$, für $\mathbb{F}_{7^3}$ an, das heißt, ein Element ω mit $ord(\omega) = 7^3 - 1 = 342 = 19 \cdot 3^2 \cdot 2$.
(Hinweis: $ord(\alpha) = 9$, versuche $\omega = \alpha + 1$.)

(e) (Zusatzfrage!) Galois gibt $\alpha^2 + \alpha$ als Primitivwurzel an und behauptet $(\alpha + 1)^{19} = -1$. Hat er sich verrechnet?

4. **(a)** Seien R und S Ringe mit 1.
Was ist ein Ideal in R?
Was ist ein Ringhomomorphismus $\phi: \ R \longrightarrow S$?
Was ist der Kern von ϕ?
Zeige, dass $\ker(\phi)$ ein Ideal in R ist!

(b) Sei $\mathbb{F}_p[X]$ der Polynomring über dem Körper $\mathbb{F}_p$ aus p Elementen und $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ das direkte Produkt von $\mathbb{F}_p$ mit sich selbst (betrachtet als Ring mit komponentenweiser Addition und Multiplikation). Sei ϕ die Abbildung

$$\phi : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \quad f \mapsto (f(0), f(1)),$$

wobei $f(0)$ bzw. $f(1)$ die Werte von $f(X)$ in 0 bzw. 1 aus $\mathbb{F}_p$ sind.
(i) Zeige, dass ϕ ein Ringhomomorphismus ist.
(ii) Bestimme das Ideal $\ker(\phi) \subset \mathbb{F}_p[X]$ und alle maximalen Ideale $m \subset \mathbb{F}_p[X]$, die $\ker(\phi)$ enthalten. Gib für all diese Ideale jeweils einen Erzeuger an. Warum reicht ein Erzeuger?

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

5. **(a)** Betrachte die Riccatische Differentialgleichung $y' = py^2 + qy + r$ mit stetigen Funktionen p, q, r auf $\mathbb{R}$, wobei p nicht die Nullfunktion ist.
Zeige, dass für vier paarweise verschiedene Lösungen y_1, y_2, y_3, y_4 der Gleichung das Doppelverhältnis

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} \cdot \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$$

konstant ist. Du kannst z.B. auf folgende Weise vorgehen: Ist y_1 eine Lösung der Differentialgleichung und $y_1 + 1/v$ ebenfalls, so erfüllt v eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Diese Gleichung hat die Ordnung 1. Sind v_1, v_2 und v_3 Lösungen einer solchen linearen Gleichung, dann ist die Funktion $\frac{v_1 - v_3}{v_2 - v_3}$ konstant. Wende das in geeigneter Weise für verschiedene Lösungen der Riccatischen Gleichung an.

(b) Die Gleichung $2x^2 y'(x) = (x-1)(y^2(x) - x^2) + 2xy(x)$ (für $x \neq 0$) hat die folgenden drei Lösungen:

$$y_1 : \quad x \mapsto x; \qquad y_2 : \ x \mapsto -x;$$
$$y_3 : \ x \mapsto x\tfrac{x+e^x}{x-e^x}.$$

Was ist die allgemeine Lösung der Gleichung?

6. Es sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Wir suchen alle Lösungen der linearen Differentialgleichung $y''(x) + (\gamma - x^2/4)\, y(x) = 0$. Führe dazu die Gleichung durch den Ansatz $y(x) = e^{-x^2/4} z(x)$ auf eine Gleichung der Form $z''(x) - xz'(x) + \delta z(x) = 0$ zurück. Gib für jede Lösung der neuen Gleichung eine Potenzreihenentwicklung um den Punkt 0 an, und zeige, dass diese Potenzreihe auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Lösung konvergiert. Unter welchen Voraussetzungen hat die zweite Gleichung polynomiale Lösungen?

FUNKTIONENTHEORIE

7. **(a)** Für $n \in \mathbb{N}$ berechne $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^n} dz$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| < 1$. Berechne $\int_{|z|=1} \left(\frac{z}{z-z_0}\right)^n dz$.

8. Zeige, dass

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\cos\left(\frac{z}{n}\right)\right)$$

eine auf $\left\{z \in \mathbb{C},\ |Re(z)| < \frac{\pi}{2}\right\}$ holomorphe Funktion darstellt.