TESTKLAUSUR (August 2002)

ZAHLENTHEORIE

1. Es sei p eine ungerade Primzahl.

(a) Definiere den Begriff Primitivwurzel $\pmod{p}$.

(b) Finde eine Primitivwurzel $\pmod{13}$ und löse die Kongruenz $x^6 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$.

(c) Zeige:
Ist $p \equiv 1 \pmod{12}$, so gibt es genau 6 modulo p inkongruente Lösungen der Kongruenz $x^6 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
Ist $p \equiv 5 \pmod{12}$, so gibt es genau 2 modulo p inkongruente Lösungen der Kongruenz $x^6 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

2. **(a)** Es seien a, m natürliche Zahlen. Wieviele Lösungen besitzt die Kongruenz $ax \equiv 1 \pmod{m}$?

(b) Löse die Kongruenz $28x \equiv 1 \pmod{101}$.

(c) Zeige: Ist p eine Primzahl und sind a, b natürliche Zahlen mit $p|ab$, so gilt $p|a$ oder $p|b$.
(Verwende NICHT den Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie!)

ALGEBRA

3. **(a)** Berichte kurz über den Inhalt der Sylowschen Sätze.

(b) Zeige, daß jede Gruppe der Ordnung 37 isomorph zu $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ ist.

(c) Zeige, daß jede Gruppe der Ordnung 35 isomorph zu $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ ist.

(d) Zeige, daß jede Gruppe der Ordnung 1295 isomorph zu $\mathbb{Z}/1295\mathbb{Z}$ ist.

4. Es sei L ein minimaler Zerfällungskörper des Polynoms $X^6 - 49$ über $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimme den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Bestimme die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(c) Finde alle Zwischenkörper zwischen $\mathbb{Q}$ und L.

(d) Finde ein primitives Element für die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

5. **(a)** Lies die Differentialgleichung $y'' + py' + qy = 0$. Mit p und q werden hier stetig differenzierbare Funktionen auf einem Intervall bezeichnet. Zeige, dass die Gleichung genau dann ein Fundamentalsystem aus zwei Funktionen y_1, y_2 hat mit $y_1 \cdot y_2 = 1$, wenn p und q die Gleichung $q' + 2pq = 0$ mit $q < 0$ lösen.

(b) Bestimme ein Fundamentalsystem wie im ersten Teil mit $p(x) = 1/x$.

6. Für $a > 0$ bestimme alle differenzierbaren Kurven in $\mathbb{R}^2$ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist P ein Punkt der Kurve, so schneidet die Normale in diesem Punkt die erste Koordinatenachse in genau einem Punkt Q, und der Mittelpunkt zwischen P und Q liegt in der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = ax\}$.

FUNKTIONENTHEORIE

7. **(a)** Definiere die Begriffe „periodische Funktion“ und „rationale Funktion“.

(b) Zeige: Ist f eine nichtkonstante meromorphe periodische Funktion auf $\mathbb{C}$, so ist f nicht rational.

8. Berechne die Laurentreihe von $f(z) = \frac{z}{z-3}$ um 1 in den Kreisringen $\{0 < |z-1| < 2\}$ und $\{|z-1| > 2\}$.