TESTKLAUSUR (Februar 2002)

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$xy' = y - x\cos^2\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

Gib jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich an, auf dem y erklärt ist.

2. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft.

Für jeden Punkt P des Graphen von f ist die Länge der Strecke PE_P gleich 1, wobei der Punkt E_P wie folgt konstruiert ist.

n_P sei die Gerade, die durch P verläuft und senkrecht auf der Tangente an den Graphen steht. L_P sei der Fußpunkt des Lots von P auf die x-Achse und E_P der Fußpunkt des Lots von L_P auf die Gerade n_P.

FUNKTIONENTHEORIE

3. Zeige die folgenden Aussagen.

1. Für $a > 0$ und jede reelle Zahl b mit positivem Realteil gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(ab+1)}{4b^3}e^{-ab}.$$

2. Für jedes $a > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\log a}{2a}.$$

4. 1. Es sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ und γ eine geschlossene Kurve, auf der weder Singularitäten noch Nullstellen von f liegen. Die Umlaufzahl $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ für jedes z sei Null oder Eins. Zeige, dass das Integral

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

die Differenz zwischen der Anzahl der Polstellen und der Anzahl der Nullstellen (natürlich mit Vielfachheiten gezählt) in der Menge bestimmt, die von γ umschlossen wird.

2. Die Funktion f sei meromorph auf $\mathbb{C}$ und habe nur endlich viele Nullstellen $p_1, \ldots, p_k$ und endlich viele Polstellen $q_1, \ldots, q_l$, wobei jede entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach aufgeführt ist. Beweise, dass f genau dann rational ist, wenn gilt
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{z-p_n} - \sum_{m=1}^{l} \frac{1}{z-q_m}.$$

ZAHLENTHEORIE

5. (a) Zeige für natürliche Zahlen $a \neq b, m$, daß $(a-b)$ ein Teiler von $(a^m - b^m)$ ist.

(b) Zeige: Ist q eine Primzahl und sind a, b, zu q teilerfremde natürliche Zahlen sowie m eine natürliche Zahl, so gilt $a^{m(q-1)} - b^{m(q-1)} \equiv 0 \pmod{q}$.

(c) Es sei p eine Primzahl, und a, b seien teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige: Ist q eine Primzahl, die $(a^p - b^p)$ teilt aber nicht $(a-b)$, so gilt $q \equiv 1 \pmod{p}$.

6. (a) Formuliere das Quadratische Reziprozitätsgesetz zusammen mit den Ergänzungssätzen für das Legendresymbol.

(b) Es sei $p < q$ ein Primzahlzwilling, d.h. p, q sind Primzahlen und $q - p = 2$. Zeige: Ist p Quadratischer Rest $\pmod{q}$, so gilt $q \equiv 1 \pmod{8}$ oder $q \equiv 3 \pmod{8}$.

ALGEBRA

7. 1. Formulieren Sie den Hauptsatz der Galoistheorie.

2. Gegeben sei ein beliebiger Grundkörper K und zwei Galoiserweiterungen E, F von K vom Grad 2 bzw. 3 in einem algebraischen Abschluss von K. Es sei L das Kompositum von E und F, d.h. die kleinste Körpererweiterung von K, die E und F enthält. Zeigen Sie, dass L eine Galoiserweiterung von K ist und dass die Galoisgruppe von L über K eine zyklische Gruppe der Ordnung 6 ist.

3. Geben Sie je ein Beispiel für E und F im Falle $K = \mathbb{Q}$ (mit Begründung).

8. 1. Bestimme die Wurzeln des Polynoms $f = x^4 - 10x^2 + 16$ in $\mathbb{C}$.

2. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von f. Zeigen Sie, dass der Körper $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist.

3. Bestimmen Sie den Grad und die Galoisgruppe von L über $\mathbb{Q}$.

4. Geben Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ an.