TESTKLAUSUR (August 2001)

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Es sei A eine reelle Zahl. Benutze den Ansatz $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{z(x)}$, um die Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y^2 + \frac{xy-1}{x^2} = 0$$

unter der Anfangsbedingung $y(1) = A$ zu finden. Was ist der größtmögliche Definitionsbereich, auf dem y erklärt ist?

2. a) Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' = (1 + 2\tan^2 x)y.$$

auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

b) Gibt es eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung, für die $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} y(x)$ als reelle Zahl existiert? Gib gegebenenfalls alle solchen Lösungen an.

Hinweis: $y(x) = \frac{1}{\cos x}$ ist eine spezielle Lösung. Nutze dieses Wissen bei der Suche nach einem geeigneten Ansatz.

FUNKTIONENTHEORIE

3. 1. Für $\mu \in \mathbb{C}$ definiere die Funktion f durch

$$z \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu z} - 1}{z(z^2+1)}.$$

Welche Singularitäten hat f? Bestimme die Residuen.

2. Zeige, dass für jedes *reelle* μ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\mu t)}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{sgn}(\mu)\,\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-|\mu|}\right).$$

4. 1. Prüfe zu jedem der folgenden Punkte ob es eine Funktion f gibt, die holomorph auf einer Umgebung der Null ist und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die angegebene (Un-)Gleichung erfüllt:

(a) $f(1/n) = (-1)^n/n$;

(b) $f(1/n) = (n^2-1)^{-1}$;

(c) $\left|f^{(n)}(0)\right| \geq (n!)^2$;

(d) $|f(1/n)| \leq \mathrm{e}^{-n}$, ohne dass f auf einer Umgebung der Null konstant ist.

2. Es sei $G \in \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen, zusammenhängend und nicht leer) mit $G = \{\bar{z} \mid z \in G\}$. Zeige, dass für jede holomorphe Funktion f auf G auch die Funktion $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ holomorph ist. Folgere daraus, dass die folgenden Aussagen über eine holomorphe Funktion f auf G äquivalent sind:

(i) $f(G \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

(ii) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für jedes $z \in G$.

ZAHLENTHEORIE

5. Es sei $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ die Teilersummenfunktion.

(a) Zeige, daß σ multiplikativ ist und beweise die Formel $\sigma(p^r) = \frac{p^{r+1}-1}{p-1}$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl r.

(b) Zeige $\sigma(n) \leq n \cdot \prod\limits_{p|n} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$.

(Hierbei wird das Produkt über alle Primteiler p von n genommen.)

(c) Beweise für jede positive Zahl x die Abschätzung $\sum\limits_{n \leq x} \sigma(n) \leq x^2$.

6. **(a)** Zeige, daß 2 Primitivwurzel $\pmod{29}$ ist und daß $2^{12} \equiv 7 \pmod{29}$ gilt.

(b) Schließe aus **(a)**, daß $\left(\frac{7}{29}\right) = 1$ ist.

(c) Berechne $\left(\frac{7}{29}\right)$ mittels Reduktion durch das Quadratische Reziprozitätsgesetz.

ALGEBRA

7. Es sei $K = \mathbb{Q}(i)$ und $L = K(\varepsilon)$, wobei $\varepsilon = \sqrt[4]{17} \in \mathbb{R}^+$.

(a) Berechne $Gal(L, K)$.

(b) Zeige, daß L/K galoissch ist.

(c) Berechne $[L : \mathbb{Q}]$.

(d) Zeige, daß $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimme $|Gal(L, \mathbb{Q})|$.

8. Es sei $\phi : \mathbb{Z}[X, Y] \longrightarrow \mathbb{Z}[T]$ der eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus mit $\phi(X) = T^2$ und $\phi(Y) = T^3$.

(a) Zeige, daß ϕ nicht surjektiv ist.

(b) Zeige, daß $B := \mathrm{Bild}(\phi) = \phi(\mathbb{Z}[X, Y])$ ein Unterring von $\mathbb{Z}[T]$ ist aber kein Ideal von $\mathbb{Z}[T]$.

(c) Zeige, daß B ein Integritätsbereich ist.

(d) Zeige, daß B nicht faktoriell ist.