Testklausur (Februar 2001)

1. Es seien $\mathbb{R}[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über dem Körper der reellen Zahlen und

$$I = (x^2+1)\mathbb{R}[X] := \{f = (x^2+1)h \mid h \in \mathbb{R}[X]\}.$$

(a) Rechne nach, daß I ein Ideal ist.

(b) Zeige, daß I sogar ein Primideal ist.

(c) Es sei $\alpha := (x + I) \in \mathbb{R}[X]/I$. Berechne $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ und α^4.

2. Es sei L ein minimaler Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 3$ über $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimme den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Bestimme die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L/\mathbb{Q})$

(c) Finde ein primitives Element für die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$.

3. **(a)** Formuliere das Quadratische Reziprozitätsgesetz mit seinen Ergänzungssätzen für das Legendresymbol.

(b) Es sei p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl. Zeige, dass die Kongruenz

$$x^2 + 8x - 4 \equiv 0 \pmod{p}$$

genau dann eine Lösung in den ganzen Zahlen besitzt, wenn 5 quadratischer Rest $\pmod{p}$ ist.

(c) Zeige, daß für $p \neq 2, 5$ die Kongruenz in **(b)** genau dann lösbar ist, wenn $p \equiv 1 \pmod{5}$ oder $p \equiv -1 \pmod{5}$ ist.

4. **(a)** Definiere die Begriffe "Faltung $f * g$ zweier arithmetischer Funktionen f und g" und "vollständig multiplikative Funktion".

(b) Ist μ die Möbiusfunktion und $f \neq 0$ vollständig multiplikativ, so ist $\mu \cdot f$ die Inverse Funktion von f bzgl. der Faltung.

(c) Ist $f \neq 0$ vollständig multiplikativ aber nicht das Neutrale Element bzgl. der Faltung, so ist die inverse Funktion von f bzgl. der Faltung nicht vollständig multiplikativ.

5. Bestimme alle Lösungen von $y' = 4x\sqrt{|y|}$. Wieso steht das Ergebnis nicht im Widerspruch zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz?

6. Löse die Differentialgleichung $x^2y'' - xy' + y = 0$ auf dem Intervall $(0, \infty)$. Tipp: Für $x > 0$ führt die Transformation $x = e^t$, $u(t) = y(e^t)$ zu einer linearen Differentialgleichung in u mit konstanten Koeffizienten.

7. **(a)** Berichten Sie kurz über die verschiedenen Zweige des komplexen Logarithmus.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{2}.$$

8. Sei $\rho > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z_0| < \rho$. Sei f eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C}, |z| < \rho\} \setminus \{z_0\}$, die in z_0 einen Pol erster Ordnung besitzt. Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f an der Stelle 0 und $|z_0| < r < \rho$.

(a) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n-1} - z_0 a_n) r^n = 0$, sowie $\lim_{n\to\infty} |a_n r^n| = \infty$.

(b) Folgern Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = z_0$.