Testklausur (August 2000)

1. **(a)** Definiere den Begriff "Isolierte Singularität" und klassifiziere die Arten von isolierten Singularitäten.

(b) Die Funktion f sei holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Es existiere eine punktierte Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$, in der $Rea(f(z)) > 0$ ist. Welcher Art ist die Singularität von f in 0?

2. **(a)** Es seien U_1 und U_2 zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ mit nichtleerem Durchschnitt. Erkläre, was es bedeutet, daß die Funktionen
$f_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ und $f_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ analytische Fortsetzungen voneinander sind.

(b) Zeige, daß die durch die Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ in ihrem Konvergenzbereich dargestellten Funktionen analytische Fortsetzungen voneinander sind.

3. **(a)** Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Definiere die Begriffe "Ideal", "Primideal", "Maximales Ideal".

(b) Zeige, daß im Polynomring $R := \mathbb{R}[X]$ die Menge
$I := (X^2+1)\cdot R = \{(X^2+1)\cdot P(X),\ P(X) \in R\}$ ein maximales Ideal ist.

(c) Finde einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}[X]/I \longrightarrow \mathbb{C}$.

4. Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $L := K(\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

(a) Zeige, daß L den Körpergrad 4 über $\mathbb{Q}$ hat.

(b) Zeige, daß L der Zerfällungskörper von $X^4 - 4X^2 + 2$ ist.

(c) Zeige, daß $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist.

5. **(a)** Zitiere den Chinesischen Restesatz.

(b) Löse die Kongruenz $X^3 - 2X^2 - 2 \equiv 0 \pmod{5^2}$.

(c) Löse die Kongruenz $X^3 - 2X^2 - 2 \equiv 0 \pmod{5^2\cdot 7}$.

6. **(a)** Definiere das Jacobi-Symbol und formuliere das Reziprozitätsgesetz samt Ergänzungssätzen für das Jacobi-Symbol.

(b) Es sei b eine ungerade natürliche Zahl und a eine zu b prime ganze Zahl. Zeige, daß a kein quadratischer Rest $\pmod b$ ist, wenn $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$ gilt.

(c) Berechne die Jacobi-Symbole $\left(\frac{a}{455}\right)$ für $a = 111$, 113 und 114.

(d) Welche der a aus **(c)** sind quadratische Reste $\pmod{455}$?

7. **(a)** Begründe, daß die Funktion

$$F(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \cos(xt)dx$$

differenzierbar ist und der Differentialgleichung $F'(t) = -tF(t)$ genügt.

(b) Folgere, daß $F(t) = A \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}$ mit $A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ gilt.

8. Besitzt das System

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2 - 2\cos(x) \end{aligned}$$

von zwei Differentialgleichungen für zwei gesuchte Funktionen y_1 und y_2 eine Lösung, bei der $y_1(x)$ und $y_2(x)$ für $x \to \infty$ beschränkt bleiben? Wenn ja, so berechne diese.