Probeklausur 1999

ZAHLENTHEORIE

Aufgabe 1

(a) Zitiere das Quadratische Reziprozitätsgesetz samt Ergänzungssätze.

(b) Es sei $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeige: 3 ist Quadratischer Rest $\pmod p$ genau dann, wenn $p \equiv 1 \pmod{12}$ oder $p \equiv -1 \pmod{12}$.

(c) Ist 15 Quadratischer Rest $\pmod{137}$?

Aufgabe 2

(a) Berichte kurz über den Chinesischen Restesatz.

(b) Bestimme sämtliche Lösungen der Kongruenz $X^4 + X + 1 \equiv 0 \pmod{45}$.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Aufgabe 3

(a) Was kann über die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gesagt werden?

(b) Finde eine Differentialgleichung, deren Lösungsmenge genau die Menge $\{1 + c_1 \exp(t) + c_2 \exp(2t) + c_3 \exp(3t),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ ist.

Aufgabe 4

(a) Zeige (ohne (b)), daß es zu jedem $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung der Differentialgleichung $y' = y + y^2$ gibt, die der Anfangsbedingung $y(a) = b$ genügt.

(b) Löse die Differentialgleichung $y' = y + y^2$ vollständig.

FUNKTIONENTHEORIE

Aufgabe 5

(a) Definiere die Begriffe "Isolierte Singularität" und "Residuum" einer Funktion f in einem Punkt z_0.

(b) Stelle fest, welcher Art jeweils die Singularitäten im Nullpunkt sind und berechne die Residuen der folgenden Funktionen jeweils im Nullpunkt:

$$\frac{\sin(z)}{z^2}, \quad \frac{z^3}{\cos(z) - 1 + \frac{z^2}{2}}, \quad \exp(\frac{1}{z^2}).$$

Aufgabe 6

(a) Definiere den Konvergenzradius einer Potenzreihe um eine Punkt z_0.

(b) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$.

(c) Läßt sich die durch die Potenzreihe in (b) gegebene Funktion meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen? (Hinweis: Betrachte die Funktion $\frac{1}{(1-z)^2}$.)

ALGEBRA

Aufgabe 7

(a) Definiere die Begriffe Ideal, maximales Ideal und Primideal in einem Ring.

(b) Weise nach, daß ein Ideal $\mathfrak{A} \subset R$ eines Ringes R genau dann ein Primideal ist, wenn der Quotientenring $R/\mathfrak{A}$ ein Integritätsbereich ist. Finde eine ähnliche Charakterisierung für maximale Ideale.

Aufgabe 8

Bestimme den Zerfällungskörper K des Polynoms $X^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$. Berechne sämtliche Unterkörper von K.