

Klausurenkurs Zahlentheorie - ein Programm

Bernd Beyerstedt

Das angegebene Programm deckt thematisch den größten Teil der klausurrelevanten Gebiete ab; jedoch werden nicht sämtliche Aspekte berücksichtigt. Als weitere Sitzungen kämen z.B. die Themen "Partialbruchzerlegung" oder "Fibonaccizahlen" in Betracht. Die am Ende jeder Sitzung angegebenen Aufgaben stellen ein mögliches Angebot dar. Weiter Aufgaben finden sich unter den echten Klausuraufgaben.

1. Sitzung: Lineare Kongruenzen I

Wiederholung der Grundbegriffe: Teilbarkeit etc.; Inversenbildung, Euklidischer Algorithmus, ggT .

Aufgaben: (1) Finde x, y mit $19x + 101y = 1$; (2) Finde das Inverse von 17 modulo 30; (3) Berechne den ggT von 711 und 108. (Zahlenwerte "günstig" wählen.)

2. Sitzung: Lineare Kongruenzen II

Simultane Kongruenzen; Chinesische Restesatz.

Aufgaben: (1) Simultanes Kongruenzsystem (ohne Vorfaktoren); (2) Simultanes Kongruenzsystem (mit Vorfaktoren).

3. Sitzung: Lineare Kongruenzen III

Simultane Kongruenzen; Chinesische Restesatz.

Aufgaben: (1) Fortsetzung der letzten Sitzung; (2) Aufg. 7 September 2000.

4. Sitzung: Primitivwurzeln und die Ringstruktur von \mathbb{Z}/m I

Ringstruktur von \mathbb{Z}/m ; Primitivwurzeln; Kleiner Fermat; Fermat-Euler; Satz von Gauß.

Aufgaben: (1) Aufg. 2 März 1992; (2) Aufg. 3 a) b) September 1993.

5. Sitzung: Primitivwurzeln und die Ringstruktur von \mathbb{Z}/m II

Indexrechnung; Lösung von Exponentialgleichungen (Rückführung auf und Wiederholung von linearen Kongruenzen).

Aufgaben: (1) Exponentialgleichung (z.B. $3^x \equiv 10 \pmod{31}$).

6. Sitzung: Quadratische Reste I

Definition Quadratische Reste; Legendresymbol; Eulerkriterium; Quadratisches Reziprozitätsgesetz.

Aufgaben: (1) Berechnung (Auflistung) der Quadratischen Reste eines Moduls; (2) Aufg. 7 September 1999.

7. Sitzung: Quadratische Reste II

Wiederholung; Jacobisymbol; Quadratisches Reziprozitätsgesetz.

Aufgaben: (1) Aufg. 8 September 2000; (2) Aufg. 7 März 2000; (3) Aufg. 8 a) b) März 1999.

8. Sitzung: Quadratische Reste III

Berechnung von Jacobi- und Legendresymbolen.

Aufgaben: (1) Aufg. 8 c) d) März 1999; (2) Aufg. 2 Frühjahr 1995.

9. Sitzung: Zahlentheoretische Funktionen I

Definition Zahlentheoretische Funktion; Beispiele; φ , σ , τ , μ ; Faltung; Umkehrformel.

Aufgaben: (1) Aufg. 8 September 1999 (+ Wiederholung von Doppelsummen).

10. Sitzung: Zahlentheoretische Funktionen II

Fortsetzung; Multiplikative Funktionen, Beispiele; Nachweis der Multiplikativität; Faltungsformeln.

Aufgaben: (1) Aufg. 2 a) März 1993; (2) Aufg. 2 a) b) März 1990.

11. Sitzung: Polynomkongruenzen I

Stichwort: Hensellemma; Erläuterung: Reduktion $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ auf $f(x) \equiv 0 \pmod{p^n}$ (Wiederholung Chinesischer Restesatz); Liften von $\pmod{p^n}$ nach $\pmod{p^{n+1}}$ anhand eines Beispiels ($n = 1$).

Aufgaben: (1) Einfaches Beispiel; (2) Aufg. 2 b) März 1991.

12. Sitzung: Polynomkongruenzen II

Zusammenhang mit Taylorentwicklung, allgemeine Formel; mögliche "Lösungsbäume".

Aufgaben: (1) Ein weiteres Beispiel, diesmal mit Formelbenutzung.

13.* Sitzung: Summe von Quadraten

Wiederholung Quadratische Reste; Summe von zwei Quadraten, Summe von drei Quadraten; Ergebnisse für Summen von vier Quadraten.

Aufgaben: (1) Aufg. 1 März 1996.