Tangentiale Flachheit und Lech- Hironaka- Ungleichungen

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der mathematischen Fakultät
der Friedrich- Schiller- Universität Jena

von Jörg Jahnel
geboren am 7. November 1968 in Eisenberg

Gutachter:
...
...
...

Tag des Beschlusses über die Verleihung des Doktorgrades:

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

Betrachtet man ein nicht widersprüchliches lineares Gleichungssystem

$a_{11}X_1+ \dots + a_{1n}X_n - b_1 = 0$

$\cdot\ \cdot\ \cdot$

$a_{m1}X_1+ \dots + a_{mn}X_n - b_m = 0$ mit $a_{ij}, b_k \in L$, L ein Körper

so versteht man unter dessen Lösung üblicherweise eine lineare und bijektive Parameterdarstellung

$X_1 = c_1 + d_{11}t_1 + \dots + d_{1l}t_l$

$\cdot\ \cdot\ \cdot$

$X_n = c_n + d_{n1}t_1 + \dots + d_{nl}t_l$ mit $d_{ij}, c_k \in L$

der Lösungsmenge in L^n.

Im Falle eines beliebigen Polynomgleichungssystems

$f_1(X_1, \dots, X_n) = 0$

$\cdot\ \cdot\ \cdot$

$f_m(X_1, \dots, X_n) = 0$

mit $f_1, \dots, f_m \in L[X_1,\dots,X_n]$ und einem (algebraisch abgeschlossenen) Körper L, ist die Lage weitaus komplizierter. Selbst in einem einfachen Spezialfall wie

$X_2^2 - X_1^3 + X_1 = 0$

über dem Grundkörper $\mathbb{C}$ erweist sich die Lösungsmenge als homöomorph zu

$S^1 \times S^1 \setminus \{\text{Punkt}\}$,

also zu einem Torus, in dem ein Punkt fehlt. Eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge V im Sinne eines Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}^1$ (ein Parameter) und V ist also schon aus topologischen Gründen nicht möglich.

Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht mit globalen, sondern mit lokalen Eigenschaften der Lösungsmengen von Polynomgleichungssystemen, der sogenannten algebraischen Varietäten, befassen. Zunächst wäre hier die Frage nach einer lokalen Parametrisierung in einem bestimmten Punkt $x \in V$ zu stellen. Gilt zum Beispiel $m \leq n$ und

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_m}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

$$\left| \frac{\partial f_m}{\partial X_1}(x) \; \ldots \; \frac{\partial f_m}{\partial X_m}(x) \right|$$

so liefert im Falle des Grundkörpers $\mathbb{C}$ der Auflösungssatz tatsächlich eine holomorphe, und damit erst recht formale, Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(t_1, \ldots, t_{n-m}) \\ &\cdots \\ X_m &= f_m(t_1, \ldots, t_{n-m}) \\ X_{m+1} &= t_1 \\ &\cdots \\ X_n &= t_{n-m} \quad . \end{aligned}$$

Doch es gibt auch hier sehr einfache Spezialfälle, in denen, selbst formal, keine lokale Parametrisierung möglich ist, zum Beispiel im Nullpunkt (0,0) der algebraischen Varietät in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, die durch

$$X_2^2 - X_1^3 + X_1^2 = 0$$

definiert ist. In diesem Falle spricht man von einem singulären Punkt oder von einer Singularität, sonst von einem regulären Punkt.

Die entscheidende Invariante einer Singularität ist ihr lokaler Ring, also der Ring der Keime der im betrachteten Punkt regulären Funktionen. Wir bemerken, daß wir uns nicht auf den Fall algebraischer Varietäten beschränken werden, sondern allgemein Singularitäten lokal noetherscher Schemata betrachten. Dabei besteht jedoch eine Einschränkung: Wir behandeln nur lokale Ringe (B_0, n_0), deren Vervollständigung

$$\hat{B}_0 := \varprojlim_d B_0/n_0^d$$

einen Körper enthält, da ansonsten der für uns wichtige Begriff der Deformation von $\hat{B}_0$, also eines flachen lokalen Homomorphismus

$$f\colon (A,m) \to (B,n)$$

mit der Faser $B/mB = \hat{B}_0$ keinen Sinn hätte. Ist diese Vervollständigung isomorph zu einem Potenzreihenring $L[[X_1,\ldots,X_n]]$ über einem Körper L, so entspricht dies gerade dem regulären Fall, der, dank unserer lokalen Betrachtung, hier als trivial erscheint.

Die wohl wichtigste, wenn auch relativ grobe, Invariante eines lokalen Ringes (A,m) ist dessen Hilbertreihe

$$H_A^0 = \sum_{i=0}^{\infty} H_A^0(i) \cdot T^i .$$

Dies ist eine formale Potenzreihe, deren Koeffizienten durch die minimale Anzahl der Erzeugenden der Potenzen von m gegeben sind:

$$H_A^0(i) := \dim_{A/m} m^i/m^{i+1} .$$

Jede Hilbertreihe kann in der Gestalt

$$H_A^0 = \frac{p(T)}{(1-T)^d}$$

dargestellt werden mit einem eindeutig bestimmten ganzzahligen Polynom p , das nicht durch (1-T) teilbar ist und einem eindeutig bestimmten $d \in \mathbb{N}$. Die Reihe H_A^0 enthält Informationen über weitere Invarianten des lokalen Ringes A. So ist die Polstellenordnung d in T=1 gleich der Dimension des lokalen Ringes A, der Koeffizient $H_A^0(1)$ des Lineargliedes gleich seiner Einbettungsdimension (d.h. die minimale Dimension, die ein regulärer Raumkeim haben muß, damit man die zu A gehörige Singularität lokal und formal in ihn einbetten kann). Ferner ist p(1) gleich der Multiplizität von A.

Es ist also nur verständlich, daß Hilbertreihen und deren Summentransformierte

$$H_A^i := H_A^0 \bullet (1-T)^{-i}$$

bei der Untersuchung lokaler Singularitäten eine bedeutende Rolle spielen. So stellte zum Beispiel C. Lech die Frage, ob für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f: A \to B$ lokaler Ringe für geeignete Summentransformierte der Hilbertreihen die Ungleichung

$$H_B^i \geqslant H_A^i$$

gilt. Dies soll bedeuten, daß $H_B^i(d) \geqslant H_A^i(d)$ für jeden Koeffizienten der formalen Potenzreihen zutrifft. Im Zusammenhang mit der Auflösung der Singularitäten warf H. Hironaka die Frage auf, ob sogar stets

$$H_B^1 \geqslant H_A^1$$

eintritt. Die Hauptschwierigkeit beim Beweis solcher und ähnlicher Ungleichungen sind die vielen Unbestimmten, nämlich zwei lokale Ringe und ein Homomorphismus zwischen ihnen. Es wäre somit wenig sinnvoll, Ergebnisse für einzelne, konkrete Homomorphismen anzustreben. Es scheint jedoch ein vernünftiger Spezialfall zu sein, wenn man eine der obigen Ungleichungen für alle flachen lokalen Homomorphismen $f: A \to B$ mit einer fixierten Faser (B_0, n_0) zeigen kann.

Die hierzu bisher bekannten Ergebnisse sind recht bescheiden. So zeigte C. Lech selbst die Ungleichung $H_B^1 \geqslant H_A^1$ im Falle, daß (B_0, n_0) ein vollständiger Durchschnitt ist. Dies wurde von B. Herzog noch auf den Fall verallgemeinert, daß (B_0, n_0) eine formale semiuniverselle Deformation mit regulärer Basis besitzt. Wir verallgemeinern hier einen anderen Ansatz von B. Herzog, wollen aber zunächst festhalten, daß zu den obigen Ungleichungen nur sehr wenige positive und keine Gegenbeispiele existieren (vgl. Bemerkung (3.1) im Textteil dieser Arbeit).

Der erwähnte Ansatz von B. Herzog betrachtet Homomorphismen $f:(A,m)\to(B,n)$, für die die behaupteten Ungleichungen in einer verschärften Form gelten, nämlich als Identität $H^1_B = H^1_A \cdot H^0_{B/mB}$. Solche heißen *tangential flach.* Kann man nun zeigen, daß alle Deformationen eines lokalen Ringes (B_0,n_0) tangential flach sind, so ergibt das die Lech- Hironaka- Ungleichung $H^1_B \geqslant H^1_A$ für B_0 . Für die Eigenschaft eines lokalen Ringes, nur tangential flache Deformationen zu besitzen, wurde ein Kriterium gezeigt, welches dies in Termini gewisser Normalenmoduln ausdrückt (siehe [He-1]).

Wir betrachten hier lokale Ringe, die mit einer Filtration versehen sind. Dies ist eine absteigende Folge $F= (F^d)_{d\in\mathbb{N}}$ von Idealen, die gewissen weiteren Axiomen genügt (vgl. Definitionen (1.1)) und die Folge der Potenzen des maximalen Ideals ersetzt. Man erhält auf diese Weise einen abgeänderten Begriff der Hilbertreihe mit
$H^0_{(A,F_A)}(i):= l_A(F^i_A/F^{i+1}_A)$.

Ist nun $f:(A,F_A)\to(B,F_B)$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe, d.h. ein lokaler Homomorphismus mit $f(F^d_A)\subseteq F^d_B$ für alle $d\in\mathbb{N}$, und m das maximale Ideal in A, so gilt
$H^1_{(B,F_B)} \leqslant H^0_{(A,F_A)}\cdot H^0_{(B/mB,F_{B/mB})}$,
wobei $F_{B/mB}$ durch F_B induziert werde (Satz (1.8), geht jedoch auf B. Herzog zurück). Im Falle der Gleichheit sprechen wir von einem *tangential flachen* Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe. Hat nun der (monomial, vgl. (2.2)) filtrierte lokale Ring (B_0,F_{B_0}) *nur tangential flache Deformationen*, das heißt jeder flache lokale Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe $f:(A,F_A)\to(B,F_B)$ mit der Faser B_0 , wobei F_B in gewisser Weise aus F_A und einer Konstruktionsvorschrift für F_{B_0} erzeugt wird, ist tangential flach, so erhalten wir für B_0 eine Art Lech- Hironaka- Ungleichung mit abgewandelten Hilbertreihen. Es kommt dann im wesentlichen darauf an, diese mit den ursprünglichen Hilbertreihen zu vergleichen (siehe dazu Lemma (3.4)). Für die Eigenschaft eines monomial filtrierten lokalen Ringes, nur tangential flache Deformationen zu besitzen, geben wir in Satz (2.20) eine notwendige und eine hinreichende Bedingung an, die entsprechende Bedingungen aus [He-1] verallgemeinern, nämlich

$gr(N_{\hat{B_0}})(<-1)= 0$ (notwendig) bzw.

$N_{gr(\hat{B_0})}(<-1)= 0$ (hinreichend)

Hierbei sind die Terme auf der linken Seite Konstruktionen aus Normalenmoduln (siehe Definitionen (2.12)). Dies betrachten wir als das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit. In Abschnitt 2 und 3 wird für eine ganze Reihe von Beispielen die hinreichende Bedingung verifiziert.

Wir möchten noch bemerken, daß wir im ersten Abschnitt eine Reihe von Kriterien für die tangentiale Flachheit von Homomorphismen filtrierter lokaler Ringe angeben, die wir aus technischen Gründen, für den Beweis des Hauptergebnisses, benötigen. Ein großer Teil von ihnen geht auf B. Herzog zurück. So ist die tangentiale Flachheit des Homomorphismus $f:A\to B$ filtrierter lokaler Ringe äquivalent zu Flachheit bzw. Freiheit von gr(B) über gr(A) (,was auch den Namen erklärt). Weitere Kriterien beziehen sich auf den Fall speziellerer, sogenannter *stark separierter* Filtrationen. Ein solches (Satz (1.18)) besagt, daß die tangentiale Flachheit von $f:A\to B$ impliziert, daß, wenn man eine geeignete Basis der A- Algebra B wählt, die Strukturkonstanten von genügend hoher Ordnung sind und gibt weitere, notwendige und hinreichende, Bedingungen an. Wir fordern dabei, der Ring A soll artinsch sein. Dies ist in Wirklichkeit keine Einschränkung, da man die Frage nach der tangentialen Flachheit immer auf diesen Fall zurückführen kann (vgl. Folgerung (1.12.ii)).

Notwendig und hinreichend für die tangentiale Flachheit ist die Bedingung

$ord_{F_B}(ab)= ord_{F_A}(a)+ ord_{F_B}(b)$,

welche zusammen mit der Flachheit von f erfüllt sein und bei Basiswechsel erhalten bleiben soll. Hierbei durchläuft a alle Elemente von A und b alle Elemente von B mit $ord_{F_B}(b)= ord_{F_{B/mB}}(\bar{b})$ (Satz (1.21)).

Unsere Proposition (2.9) sichert unter gewissen Voraussetzungen, daß ein Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ filtrierter lokaler Ringe dargestellt werden kann als Komposition eines tangential flachen Homomorphismus $f:A\to R$ und einer Surjektion, d.h. es gilt $B\cong R/I$. Ein technisch sehr wesentliches Kriterium der tangentialen Flachheit (Satz (1.24)) fordert dann, daß eine Standardbasis (siehe Definitionen (1.23)) von

$I_0:= IR_0$ in $R_0:= R/mR$

angehoben werden kann zu einer Standardbasis von I unter Beibehaltung der Ordnungen.

Gegen Ende von Abschnitt 3 wenden wir uns dem Problem zu, daß die uns interessierenden Normalenmoduln $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)$ sehr schwer zu bestimmen sind, wenn I_0 nicht von Monomen erzeugt wird. Wir zeigen (Satz (3.18)), daß für $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)= 0$ das Verschwinden eines gewissen $N_{gr(I'_0,R_0)}(<-1)$ hinreichend ist. Hierbei ist I'_0 eine Modifikation des lexikographischen Anfangsformenideals. Aus technischen Gründen benötigen wir hierzu eine Verallgemeinerung des Begriffes der Filtration, sogenannte Multifiltrationen (wie auch schon für das bereits kommentierte Lemma (3.4)). Als Konsequenz daraus ergibt sich (Proposition (3.26)), daß sogar zu jedem lokalen Ring $B_0:= R_0/I_0$ mit $R_0:= L[[X_1,...,X_n]]$ eine Filtration auf R_0 existiert mit der B_0 nur tangential flache Deformationen besitzt.

Zum Schluß beweisen wir, daß sich die Bedingung $N_{gr(\hat{B_0})}(<-1)= 0$ in gewisser Weise auf verzweigte Überlagerungen von B_0 überträgt. Damit entstehen aus jeder unserer Beispielsingularitäten zu einer Lech-Hironaka- Ungleichung ganze Serien.

Im Folgenden benutzen wir die üblichen Vereinbarungen und Bezeichnungen der kommutativen Algebra, wie sie etwa in [Ma] oder [Bo] verwendet werden. Insbesondere seien alle Ringe kommutativ und mögen ein Einselement besitzen. Alle Ringhomomorphismen sollen das Einselement respektieren. Alle Moduln seien unitär, alle lokalen Ringe noethersch. Ist $r= (r_1,...,r_n)\in R^n$ ein n- Tupel von Elementen des Ringes R, so bezeichnet

$rR= (r_1,...,r_m)R$

das von den Koordinaten von R erzeugte Ideal. Diese Schreibweise könnte zwar falsch gedeutet werden, wir halten sie jedoch trotzdem für zweckmäßig, da sie das Aufschreiben unnötig vieler Indizes vermeidet.

Am Ende der Arbeit sind die am häufigsten benutzten Bezeichnungen noch einmal zusammengestellt.

Ich möchte Herrn Dr. sc. Bernd Herzog für die umfangreiche Unterstützung, insbesondere für die Einführung in die Problematik und in seine Ergebnisse, herzlich danken.

1. TANGENTIALE FLACHHEIT VON HOMOMORPHISMEN FILTRIERTER LOKALER RINGE

(1.1) DEFINITIONEN

Sei (A,m) ein lokaler Ring. Eine *Filtration* F_A auf A ist eine Folge $(F_A^d)_{d\in\mathbb{N}}$ von Idealen in A mit

(a) $F_A^d \supseteq F_A^{d+1}$ für alle $d\in\mathbb{N}$,

(b) $F_A^0 = A$ und $F_A^1 \neq A$,

(c) $F_A^{d_1}\cdot F_A^{d_2} \subseteq F_A^{d_1+d_2}$ für beliebige $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$.

Eine Filtration F_A auf A heißt *koendlich*, wenn A/F_A^d für alle $d\in\mathbb{N}$ endliche Länge besitzt.

Ein *filtrierter lokaler Ring* ist ein Paar (A,F_A), das aus einem lokalen Ring A und einer Filtration F_A auf A besteht.

Sei A ein filtrierter lokaler Ring und $x\in A$ ein Element. Dann ist die *Ordnung* von x bezüglich der Filtration F_A definiert als

$$\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}_{F_A}(x) := \sup\{d\in\mathbb{N}: x\in F_A^d\}.$$

Ein *Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe* A,B ist ein lokaler Homomorphismus $f: A\to B$ lokaler Ringe mit

$$f(F_A^d) \subseteq F_B^d$$

für alle $d\in\mathbb{N}$.

(1.2) KONVENTION

Soweit nicht etwas anderes ausgesagt wird, werden im Folgenden filtrierte lokale Ringe als koendlich filtriert angenommen.

(1.3) BEMERKUNG

Die wohl wichtigsten Beispiele liefern die lokalen Ringe, die mit ihrer *kanonischen* Filtration F_A mit

$$F_A^d := m^d$$

für $d\in\mathbb{N}$ versehen sind. Es sei bemerkt, daß die Homomorphismen kanonisch filtrierter lokaler Ringe nichts anderes sind, als die lokalen Homomorphismen.

Wir werden uns jedoch nicht auf diese Situation einschränken. Dies wird dadurch gerechtfertigt, daß die Aussagen dieser Arbeit im allgemeinen für relativ große Klassen von Filtrationen gelten. Weitaus wichtiger ist jedoch, daß man, wie wir sehen werden, mit Hilfe einer Filtration, die einem gegebenen lokalen Ring in gewisser Weise angepaßt (und im allgemeinen nicht die kanonische) ist, Ergebnisse über diesen Ring gewinnen kann, die überhaupt nichts mit Filtrationen zu tun haben.

Die folgenden Beispiele stellen Klassen von Filtrationen dar, die im Weiteren eine Rolle spielen werden.

(1.4) BEISPIELE

a) Seien (A,m) ein lokaler Ring und $I\subseteq m$ ein Ideal in A. Dann heißt die Filtration mit

$$F_A^d := I^d$$

für $d\in\mathbb{N}$ *I-adische Filtration* auf A. Offenbar ist die m-adische Filtration gerade die kanonische.

Die I-adische Filtration ist koendlich genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $k\in\mathbb{N}$ gibt mit $m^k\subseteq I\subseteq m$, also wenn $\mathrm{rad}(I)= m$ ist.

b) Sei $E= (E_d)_{d\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen $E_d\subseteq \mathbb{N}^n$ mit folgenden Eigenschaften.

(a) Ist $(a_1,\ldots,a_n)\in E_d$ und $b_1\geqslant a_1,\ldots,b_n\geqslant a_n$, so gilt auch $(b_1,\ldots,b_n)\in E_d$.

(b) Es gilt $E_i\supseteq E_{i+1}$ für alle $i\in\mathbb{N}$.

(c) Es gilt $E_i+E_j\subseteq E_{i+j}$ für beliebige $i,j\in\mathbb{N}$.

(d) Es ist $(0,\ldots,0)\in E_0\backslash E_1$.

Dann heißt E *filtrierende Exponentenfamilie* oder einfach *filtrierende Familie*.

Seien weiterhin (A,m) ein lokaler Ring und $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ein n-Tupel von Elementen aus m. Wir setzen

$$F_A^d := \sum_{a\in E_d} x^a A$$

Dann ist $F_A:=(F_A^d)_{d\in\mathbb{N}}$ eine Filtration auf A und heißt *durch* x *definierte E-Filtration* auf A.

Ist erstens der Faktorring

$$A/(x_1,\ldots,x_n)$$

von endlicher Länge und existiert zweitens eine natürliche Zahl k mit

$$k\bullet e_i\in E_1$$

für $i=1,...,n$, in welchem Falle wir E eine *koendlich filtrierende Familie* nennen, so ist F_A koendlich. Hierbei bezeichnet e_i den i-ten Einheitsvektor. Es sei bemerkt, daß die erste Bedingung für die Koendlichkeit auch notwendig ist.

Eine Filtration F_A auf einem lokalen Ring (A,m) heißt *monomial in dem* n-*Tupel* $x=(x_1,...,x_n)$ von Elementen aus m, wenn sie für eine filtrierende Familie E die durch x definierte E-Filtration ist.

Sei nun F_A eine beliebige Filtration auf einem lokalen Ring (A,m) und $x=(x_1,...,x_n)$ ein n-Tupel von Elementen aus m. Dann definieren F_A und x in der folgenden Weise eine filtrierende Familie E.

$$E_d := \{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{N}^n:\ x_1^{a_1}\bullet...\bullet x_n^{a_n}\in F_A^d\}$$

Selbstverständlich ist die durch x definierte E-Filtration im allgemeinen feiner als F_A und stimmt mit dieser genau dann überein, wenn F_A monomial in x ist.

c) Sei $q=(q_1,...,q_n)$ ein n-Tupel positiver reeller Zahlen, (A,m) ein lokaler Ring und $x=(x_1,...,x_n)$ ein n-Tupel von Elementen aus m. Wir setzen

$$F_A^d := \sum_{\langle a,q\rangle\geq d} x^a A.$$

Dann ist $F_A:=(F_A^d)_{d\in\mathbb{N}}$ eine Filtration auf A und heißt *durch* x *definierte* q-*Filtration* auf A.

F_A ist koendlich genau dann, wenn der Faktorring

$$A/(x_1,...,x_n)$$

endliche Länge besitzt.

Selbstverständlich ist die durch x definierte q-Filtration auch eine durch x definierte E-Filtration, wenn man für die filtrierende Familie E

$$E_d := \{(a_1,...,a_n)\in\mathbb{N}^n:\ \langle(a_1,...,a_n),(q_1,...,q_n)\rangle\geq d\}$$

setzt.

Eine Filtration F_A auf einem lokalen Ring (A,m) heißt *quasihomogen in dem* n-*Tupel* $x=(x_1,...,x_n)$ von Elementen aus m, wenn sie für ein n-Tupel q positiver reeller Zahlen die durch x definierte q-Filtration ist.

d) Sei A ein filtrierter lokaler Ring und $f:(A,m)\rightarrow(B,n)$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe. Dann definiert

$$F_B^d := f(F_A^d)B$$

eine nicht notwendig koendliche Filtration auf B, die *Bildfiltration* heißt. Ist f eine Surjektion, so ist F_B automatisch koendlich.

Soweit nicht etwas anderes ausgesagt wird, werden Faktorringe von filtrierten lokalen Ringen als mit der Bildfiltration versehen betrachtet.

(1.5) DEFINITIONEN

Sei A ein filtrierter lokaler Ring. Dann wird die direkte Summe

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_A^d/F_A^{d+1}$$

mit der Multiplikation

$$(a \bmod F_A^{d+1})\bullet(a' \bmod F_A^{d'+1}) := (aa' \bmod F_A^{d+d'+1})$$

für $a\in F_A^d$, $a'\in F_A^{d'}$ versehen, zu A *assoziierter graduierter Ring* genannt und mit $gr_{F_A}(A)$ oder $gr(A)$ bezeichnet.

Sei M ein Modul über dem filtrierten lokalen Ring A. Dann wird die direkte Summe

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_A^d M/F_A^{d+1}$$

mit der Multiplikation mit Elementen aus $gr_{F_A}(A)$

$$(a \bmod F_A^{d+1})\bullet(m \bmod F_A^{d'+1}M) := (am \bmod F_A^{d+d'+1})$$

für $a\in F_A^d$, $m\in F_A^{d'}M$ versehen, zu M *assoziierter graduierter* $gr_{F_A}(A)$-*Modul* genannt und mit $gr_{F_A}(M)$ oder $gr(M)$ bezeichnet.

Sei $f:A\to B$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe. Dann wird in kanonischer Weise, das heißt für $a\in F_A^d$

$$(a \bmod F_A^{d+1}) \mapsto (f(a) \bmod F_B^{d+1})$$

ein graduierter Ringhomomorphismus

$$gr(f):\ gr_{F_A}(A)\to gr_{F_B}(B)$$

induziert.

Sei I ein Ideal in dem filtrierten lokalen Ring A. Dann induziert der natürliche Homomorphismus $p:A\to A/I$ eine kanonische Surjektion

$$gr(p):\ gr_{F_A}(A)\to gr_{F_{A/I}}(A/I) = gr_{F_A}(A/I) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_A^d+I/F_A^{d+1}+I.$$

Deren Kern heißt *Anfangsformenideal* von I in $gr_{F_A}(A)$ und wird mit $gr_{F_A}(I,A)$ oder $gr(I,A)$ bezeichnet. Wir bemerken, daß

$$\begin{aligned} gr_{F_A}(I,A) &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_A^d\cap(F_A^{d+1}+I)/F_A^{d+1} \\ &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} I\cap F_A^d+F_A^{d+1}/F_A^{d+1} \\ &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} I\cap F_A^d/I\cap F_A^{d+1} \end{aligned}$$

gilt.

(1.6) DEFINITIONEN

Sei A ein filtrierter lokaler Ring. Dann heißt die Funktion
$H_A\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit
$$H_A(d):= l_A(F_A^d/F_A^{d+1})$$
Hilbertfunktion von A.

Die *i-te Summentransformierte* H_A^i der Hilbertfunktion von A ist definiert durch $H_A^0:= H_A$ und
$$H_A^{i+1}(d):= \sum_{j=0}^{d} H_A^i(j)$$
für $i,d\in\mathbb{N}$.

Die erste Summentransformierte H_A^1 der Hilbertfunktion von A heißt auch *Hilbert-Samuel-Funktion* von A.

(1.7) BEMERKUNGEN

Da F_A eine koendliche Filtration ist, ist $l_A(F_A^d/F_A^{d+1})$ tatsächlich endlich. Die Definitionen der Hilbertfunktion und ihrer Summentransformierten sind also sinnvoll.

Es sei bemerkt, daß für die Hilbert-Samuel-Funktion des filtrierten lokalen Rings A
$$H_A^1(d)= l_A(A/F_A^{d+1})$$
gilt.

Ist A ein I-adisch filtrierter lokaler Ring (und folglich rad(I)= m), so gibt es ein Polynom $h_A\in\mathbb{Q}[X]$ mit $H_A(d)= h_A(d)$ für $d\gg 0$. Entsprechend existieren Polynome $h_A^i\in\mathbb{Q}[X]$ mit $H_A^i(d)= h_A^i(d)$ für $d\gg 0$. Wir nennen h_A *Hilbertpolynom* und h_A^i *i-te Summentransformierte* des Hilbertpolynoms von A. h_A^1 heißt auch *Hilbert-Samuel-Polynom* von A. Für die Grade dieser Polynome gilt bekanntlich $\deg(h^i)= n+i-1$, speziell also $\deg(h\ )= n-1$ und $\deg(h_A^1)= n$, wenn man $n:= \dim A$ setzt. Der Koeffizient von h_A^1 bei X^n läßt sich als $\frac{e_I(A)}{n!}$ schreiben. Dann ist $e_I(A)$ eine positive ganze Zahl und heißt *Multiplizität des Ideals* I im lokalen Ring A. Ist I=m das maximale Ideal, so schreiben wir statt $e_I(A)$ einfach e(A) und nennen diese Zahl *Multiplizität des lokalen Rings* A.

Im Folgenden werden Funktionen $H\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit ihrer assoziierten formalen Potenzreihe
$$H= \sum_{d=0}^{\infty} H(d)T^d\in \mathbb{Z}[T]$$
identifiziert. Ist A ein filtrierter lokaler Ring, so werden wir

insbesondere von dessen *Hilbertreihe* H_A, deren *i-ter Summentransformierten* H_A^i und für i=1 von der *Hilbert-Samuel-Reihe* H_A^1 von A sprechen. Wir bemerken, daß

$$H_A^i = H_A^0 \cdot (1-T)^{-i}$$

gilt. Seien $H, H' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei Funktionen. Unter deren Produkt verstehen wir immer das Produkt im Sinne der assoziierten Potenzreihen, also

$$(H \cdot H')(d) = \sum_{i+j=d} H(i) \cdot H'(j).$$

Dies ist der eigentliche Vorteil unserer Identifikation, denn Produkte dieser Art treten im Folgenden häufiger auf.

Eine Ungleichung zwischen formalen Potenzreihen soll stets im Sinne der totalen Ordnung verstanden werden, das heißt es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(n)T^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} H'(n)T^n$$

genau dann, wenn

$$H(n) \leqslant H'(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $f: A \to B$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe. Dann gehören zu f in naheliegender Weise drei Hilbertreihen, nämlich H_A, H_B und H_{B_0}, wobei $B_0 := B/mB$ die (spezielle) *Faser* von f bezeichnet. m sei hierbei das maximale Ideal von A. (Selbstverständwird B_0 mit der Bildfiltration von F_B versehen.) Der folgende Satz gibt eine Ungleichung für diese drei Reihen an und untersucht die Frage, wann Gleichheit eintritt.

(1.8) SATZ

Sei $f: A \to B$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe mit der Faser B_0.

(i) Dann gilt

$$H_B^1 \leqslant H_A^1 \cdot H_{B_0}^0.$$

(ii) Folgende Aussagen sind äquivalent.

(a) Es gilt $H_B^1 = H_A^1 \cdot H_{B_0}^0$.

(b) Der Homomorphismus

$$gr(f): gr(A) \to gr(B),$$

der durch $f: A \to B$ induziert wird, ist flach.

(c) Der Modul $gr_F\,(B/F_A^1B)$ ist A/F_A^1-flach und es gibt einen graduierten A-Modul^{B}-Schnitt

$$s\colon gr_{F_B}(B/F_A^1B)\to gr_{F_B}(B)$$

der kanonischen Surjektion $gr_{F_B}(B)\to gr_{F_B}(B/F_A^1B)$ derart, daß der induzierte Homomorphismus

$$gr_{F_A}(A)\otimes_A gr_{F_B}(B/F_A^1B)\to gr_{F_B}(B)$$

graduierter Moduln über $gr_{F_A}(A)$ injektiv ist.
(In diesem Falle ist er ein Isomorphismus für jeden graduierten Schnitt s.)

(d) $gr_{F_B}(B/F_A^1B)$ ist flach über A/F_A^1, die kanonische Surjektion

$$gr_{F_A}(A)\otimes_A B(k)\to gr_{F_A}(B)\otimes_B B(k)$$

mit $B(k):=B/F_B^{k+1}$ ist bijektiv für alle $k\in\mathbb{N}$ und es gilt

$$0=D(i,k):=(F_A^iB\cap F_B^{i+k+1})/(F_A^iF_B^{k+1}+F_A^{i+1}B\cap F_B^{i+k+1})$$

für alle $i,k\in\mathbb{N}$. (Wir bemerken, daß die kanonische Surjektion $gr_{F_A}(A)\otimes_A B(k)\to gr_{F_A}(B)\otimes_B B(k)$ aus der kanonischen Surjektion $gr_{F_A}(A)\otimes_A B\to gr_{F_A}(B)$ durch Tensorieren mit $B(k)$ über B entsteht.)

B e w e i s: (i) Dies ergibt sich aus [He-2], Theorem (4.2).

(ii) (a)$\Leftrightarrow$(b)$\Leftrightarrow$(c) folgt aus [He-2], Theorem (4.5).

(b)$\Leftrightarrow$(d) Nach [He-2], Theorem (2.7) ist (b) äquivalent dazu, daß $gr(B/F_A^1B)$ flach über A/F_A^1 ist und die kanonischen Surjektionen $gr_{F_A}^i(A)\otimes_A B(k)\to gr_{F_A}^i(B(i+k))$, die durch die Multiplikation induziert werden, bijektiv sind für alle $i,k\in\mathbb{N}$. Nun gilt jedoch

$$\begin{aligned} gr_{F_A}^i(B(i+k)) &= F_A^i(B/F_B^{i+k+1})/F_A^{i+1}(B/F_B^{i+k+1}) \\ &= F_A^iB+F_B^{i+k+1}/F_A^{i+1}B+F_B^{i+k+1} \\ &= F_A^iB/F_A^{i+1}B+F_A^iB\cap F_B^{i+k+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} gr_{F_A}(B)\otimes_B B(k) &= \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} F_A^iB/F_A^{i+1}B\otimes_B B/F_B^{k+1} \\ &= \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} F_A^iB/F_A^{i+1}B+F_A^iF_B^{k+1}, \end{aligned}$$

so daß diese Bijektivität genau dann eintritt, wenn $gr_{F_A}^i(A)\otimes_A B(k)\to gr_{F_A}^i(B)\otimes_B B(k)$ bijektiv ist und die anschließende Surjektion die Identität. Letzteres bedeutet aber gerade $F_A^iB\cap F_B^{i+k+1}\subseteq F_A^{i+1}B+F_A^iF_B^{k+1}$, also $F_A^iB\cap F_B^{i+k+1}=F_A^{i+1}B\cap F_B^{i+k+1}+F_A^iF_B^{k+1}$.

Q.E.D.

(1.9) DEFINITION

Ein Homomorphismus $f:A\to B$ filtrierter lokaler Ringe heißt *tangential flach*, wenn der assoziierte Homomorphismus graduierter Ringe

$gr(f):gr(A)\to gr(B)$

flach ist.

(1.10) BEMERKUNGEN

Die äquivalenten Bedingungen aus Satz (1.8.ii) bedeuten also jeweils die tangentiale Flachheit des Homomorphismus f.

Die Flachheit von $gr_{F_B}(B/F_A^1B)$ über A/F_A^1 ist äquivalent zur Flachheit der Homomorphismen

$A/F_A^1\to B/F_A^1B+F_B^d$,

die durch f induziert werden, für alle $d\in\mathbb{N}$.

B e w e i s: Wir bemerken zunächst die folgenden beiden Fakten.

(i) Eine direkte Summe $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ von Moduln über einem Ring R ist flach genau dann, wenn alle Moduln M_λ R-flach sind.

(ii) Ist $0\to M'\to M\to M''\to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln und sind M und M'' flach, so ist auch M' flach.

((i) folgt aus [Ma], Theorem 7.8 und aus der Tatsache, daß Tor_1^R mit direkten Summen kommutiert. (ii) ergibt sich aus der exakten Sequenz $0=Tor_2^R(M'',R)\to Tor_1^R(M',R)\to Tor_1^R(M,R)=0$ und ebenfalls aus [Ma], Theorem 7.8.)

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} gr_{F_B}(B/F_A^1B) &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_B^d(B/F_A^1B)/F_B^{d+1}(B/F_A^1B) \\ &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_B^d+F_A^1B/F_B^{d+1}+F_A^1B. \end{aligned}$$

Nunmehr ergibt sich "⇒" aus (i), der Exaktheit von

$0\to F_B^d+F_A^1B/F_B^{d+1}+F_A^1B\to B/F_B^{d+1}+F_A^1B\to B/F_B^d+F_A^1B\to 0$

und [Ma], Theorem 7.9 sukzessiv für alle $d\in\mathbb{N}$. Die Umkehrung "⇐" ergibt sich aus der gleichen exakten Sequenz, mittels (ii) und (i).

Q.E.D.

Ist $f:A\to B$ ein tangential flacher Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe, so ist gr(B) sogar gr(A)-frei mit homogenen Erzeugenden.

B e w e i s (vgl. [He-2], Theorem 5.2): Nach Satz (1.8.ii.c) gilt

$gr_{F_B}(B)\cong gr_{F_A}(A)\otimes_A gr_{F_B}(B/F_A^1B)$

$$= gr_{F_A}(A)\otimes_{A/F_A^1} gr_{F_B}(B/F_A^1B),$$

denn auf beiden Seiten des Tensorprodukts stehen in Wirklichkeit A/F_A^1-Moduln. Nun ist A/F_A^1 ein lokaler Ring mit nilpotentem maximalen Ideal und $gr_{F_B}(B/F_A^1B)$ ist flach über A/F_A^1. Nach [Ma], Theorem 7.10 ist $gr_{F_B}(B/F_A^1B)$ sogar A/F_A^1-frei. Dies liefert die Behauptung.

Q.E.D.

Das folgende Lemma ist lediglich eine Umformulierung der eben bewiesenen Aussage. Ist F_A eine Filtration auf dem lokalen Ring A, so werden hierbei und im Weiteren aus technischen Gründen Ausdrücke vom Typ F_A^d mit $d<0$ benötigt. Diese sind als das Einsideal von A zu deuten.

(1.11) LEMMA

Sei $f:A\to B$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist tangential flach.

(ii) Es gibt eine Familie $(b_i)_{i\in I}$ von Elementen aus B, die, wenn man $d(i):=\mathrm{ord}(b_i)$ setzt, folgende Bedingungen erfüllt.

(a) $B\subseteq \sum_{i\in I} Ab_i+F_B^d$ für alle $d\in\mathbb{N}$.

(b) $\sum_{i\in I} a_ib_i\in F_B^d$ mit $a_i\in A$ für alle $i\in I$ impliziert, daß $a_i\in F_A^{d-d(i)}$ für alle $i\in I$ gilt.

(iii) Es gibt eine Familie $(b_i')_{i\in I'}$ von Elementen aus B, die, wenn man $d'(i):=\mathrm{ord}(b_i')$ setzt, für jedes $d\in\mathbb{N}$ einen Isomorphismus

$$f_d:\ \bigoplus_{i\in I'}(A/F^{d-d'(i)})\to B/F_B^d$$

mit $(a_i)_{i\in I'}\mapsto \sum_{i\in I'} a_ib_i'$ induziert.

B e w e i s (vgl. [He-2], Lemma 1.17): (i)$\Rightarrow$(ii) gr(B) ist gr(A)-frei mit homogenen Erzeugenden. $(b_i)_{i\in I}$ wird so gewählt, daß $b_i\in B$ solche Erzeugende repräsentieren. Dies liefert für ein beliebiges Element $b\in F_B^d$

$$b\in \sum_{i\in I} F_A^{d-d(i)}b_i+F_B^{d+1}.$$

Es gilt also $F_B^d\in \sum_{i\in I} F_A^{d-d(i)}b_i$, woraus man (a) iterativ gewinnt.

Nehmen wir nun an, Bedingung (b) sei für einen Ausdruck $\sum_{i\in I} a_ib_i\in F_B^d$ nicht erfüllt, also $j:=\min\{\mathrm{ord}(a_i)+d(i):\ i\in I\}<d$. Nun repräsentieren b_i linear unabhängige Elemente aus gr(B), $\sum a_ib_i$ jedoch das

Nullelement von $gr^j(B)= F_B^j/F_B^{j+1}$. Folglich repräsentiert ${}^{i\in I}$ a_i das Nullelement aus $gr^{j-d(i)}(A)= F_A^{j-d(i)}/F_A^{j-d(i)+1}$, das heißt es gilt $a_i\in F_A^{j-d(i)+1}$ im Widerspruch zur Definition von j.

(ii)⇒(iii) Wir setzen $I':= I$ und $b_i':= b_i$ für alle $i\in I'$. Die Abbildungen f_d sind wegen $b_i\in F_A^{d(i)}$ für alle $i\in I'$ wohldefiniert, wegen (a) surjektiv und wegen (b) injektiv.

(iii)⇒(i) Wir betrachten folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I'} gr^{d-d'(i)}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i\in I'} A/F_A^{d+1-d'(i)} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i\in I'} A/F_A^{d-d'(i)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & gr^d(B) \arrow[r] & B/F_B^{d+1} \arrow[r] & B/F_B^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die vertikalen Homomorphismen rechts und in der Mitte sind bijektiv, also auch der vertikale Homomorphismus links. Die direkte Summe über alle $d\in\mathbb{Z}$ liefert einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I'} gr(A)[-d'(i)]\to gr(B),$$

das heißt gr(B) ist gr(A)-frei und damit f tangential flach.

Q.E.D.

(1.12) FOLGERUNGEN

(i) "Basiswechsel" Sei $f:A\to B$ ein tangential flacher Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe und $I\subseteq A$ ein echtes Ideal. Dann ist

$$f\otimes A/I:\ A/I\to B/IB$$

ebenfalls tangential flach.

(ii) "lokales Kriterium" Sei $f:A\to B$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe und $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge echter Ideale in A derart, daß für jedes F_A^d ein j existiert mit

$$I_j\subseteq F_A^d.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) $f:A\to B$ ist tangential flach.

(b) $f\otimes A/I_j:\ A/I_j\to B/I_jB$ ist tangential flach für alle j.

(iii) Sei $f:A\to B$ ein tangential flacher Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe und I ein echtes Ideal in A. Dann gilt

$$gr_{F_B}(IB,B)= gr_{F_A}(I,A)\bullet gr_{F_B}(B)$$

oder, äquivalent dazu, für alle $d\in\mathbb{N}$

$$IB\cap F_B^d= \sum_{r+s=d}(I\cap F_A^r)F_B^s + IB\cap F_B^{d+1}.$$

(iv) Sei $f:A\to B$ ein tangential flacher Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe und I ein Ideal in A derart, daß $F_A^d\subseteq I$ für ein gewisses $d\in\mathbb{N}$ gilt. Dann ist die Vervollständigung

$$(B/IB)^{\wedge}=\varprojlim_{d}(B/IB)/F_B^d(B/IB)$$

flach über A/I.

(v) Sei $f:A\to B$ ein Homomorphismus artinscher filtrierter lokaler Ringe mit der Faser B_0. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) f ist tangential flach.

(b) Es gilt $H_B^0\geqslant H_A^0 H_{B_0}^0$.

(c) Es gilt $H_B^0\leqslant H_A^0 H_{B_0}^0$ und $B/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F_B^d$ ist flach über $A/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F_A^d$.

B e w e i s (vgl. [He-2], Theorem (2.5), Corollary (2.8), Lemma (3.2.1.), Theorem (4.8)): (i) Wir nutzen die zur tangentialen Flachheit äquivalente Bedingung (iii) aus Lemma (1.11). Wir haben also Isomorphismen $f_d: \oplus_{i\in I'}(A/F_A^{d-d'(i)})\to B/F_B^d$ und es ist zu zeigen, daß die induzierten Homomorphismen

$\oplus_{i\in\mathbb{N}}[(A/I)/F_A^{d-d(i)}(A/I)]\to(B/IB)/F_B^d(B/IB)$ ebenfalls Isomorphismen sind. Sie stimmen jedoch mit den Basiswechseln $f_d\otimes A/I$ überein.

(ii) Die Implikation (a)⇒(b) ergibt sich aus (i). Zeigen wir also (b)⇒(a). Nach Voraussetzung gilt

$$H^1_{B/I_jB}(d)=\sum_{r+s=d}H^1_{A/I_j}(r)H^0_{B_0}(s).$$

für alle $d,j\in\mathbb{N}$. Für gewisses j gilt jedoch $I_j\subseteq F_A^{d+1}$ und damit $H^1_{A/I_j}(r)=H^1_A(r)$ für $r\leqslant d$ und $H^1_{B/I_jB}(d)=H^1_B(d)$. Dies liefert $H^1_B=H^1_A H^0_{B_0}$, also die tangentiale Flachheit von f.

(iii) gr(B) ist gr(A)-frei mit homogenen Erzeugenden, es gibt also einen graduierten Isomorphismus

$$\oplus_{i\in I'}\operatorname{gr}(A)[-d'(i)]\to\operatorname{gr}(B).$$

Dieser induziert nach (i) einen entsprechenden Isomorphismus für $f\otimes A/I$. Andererseits kann man auch den Funktor $\otimes_{\operatorname{gr}(A)}\operatorname{gr}(A)/\operatorname{gr}(I,A)$ anwenden, so daß wir folgendes kommutative Diagramm erhalten.

$$\begin{array}{ccc}
\oplus_{i\in I'}\operatorname{gr}(A/I)[-d'(i)] & \longrightarrow & \operatorname{gr}(B/IB)\\
\uparrow & & \uparrow\\
\oplus_{i\in I'}(\operatorname{gr}(A)/\operatorname{gr}(I,A))[-d'(i)] & \longrightarrow & \operatorname{gr}(B)/\operatorname{gr}(I,A)\operatorname{gr}(B)
\end{array}$$

Der vertikale Homomorphismus auf der linken Seite ist bijektiv, also auch der vertikale Homomorphismus auf der rechten Seite. $\operatorname{gr}(I,A)\bullet\operatorname{gr}(B)=\operatorname{gr}(IB,B)$ ist bewiesen.

Nach Definition der Anfangsformenideale ist dies äquivalent zu den Identitäten

$$\sum_{r+s=d}(I\cap F_A^r)F_B^s + F_B^{d+1} = IB\cap F_B^d + F_B^{d+1}$$

für alle $d\in\mathbb{N}$. Die Inklusionen "$\subseteq$" sind trivial, es bleibt also nur

$$IB\cap F_B^d \subseteq \sum_{r+s=d}(I\cap F_A^r)F_B^s + F_B^{d+1}$$

zu untersuchen, was offenbar zu den behaupteten Identitäten äquivalent ist.

(iv) Wir betrachten die Isomorphismen f_d aus Lemma (1.11.iii), tensorieren über A mit A/I und betrachten inverse Limites über d.

$$\begin{aligned}(B/IB)^\wedge &= \varprojlim_d \Big[\bigoplus_{i\in I'} A/(I+F_A^{d-d'(i)})\Big]\\ &= \varprojlim_d \prod_{j=0}^{\infty}\Big[\bigoplus_{i\in I',\, d'(i)=j} A/(I+F_A^{d-j})\Big]\\ &= \prod_{j=0}^{\infty} \varprojlim_d \Big[\bigoplus_{i\in I',\, d'(i)=j} A/(I+F_A^{d-j})\Big]\\ &= \prod_{j=0}^{\infty} \bigoplus_{i\in I',\, d'(i)=j} A/I\end{aligned}$$

Wir haben benutzt, daß für $j\gg 0$ $F_A^{d-j} = A$ gilt, inverse Limites untereinander kommutieren und daß für $d\gg 0$ $F_A^{d-j}\subseteq I$ ist. Nach [Ma], Exercise 7.4 sind jedoch direkte Produkte flacher Moduln über noetherschen Ringen flach. Dies liefert die Behauptung.

(v) Ersetzt man A durch $A/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F_A^d$ und B durch $B/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F_B^d$, so ändern sich die untersuchten Aussagen nicht. Nehmen wir also $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F_A^d = (0)$ und $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F_B^d = (0)$ an.

(a)⇒(c) $H_B^1 = H_A^1 H_{B_0}^0$ impliziert $H_B^0 = H_A^0 H_{B_0}^0$ (Multiplikation mit (1-T)). Da A artinsch ist, gibt es ein $d_0\in\mathbb{N}$ mit $F_A^{d_0}=(0)$, das heißt $I=(0)$ erfüllt die Voraussetzung von (iv). Folglich ist $B^\wedge$ flach über A. Da B artinsch ist, gilt $F_B^d=(0)$ für $d\gg 0$, also $B^\wedge = B$. Dies liefert die Behauptung.

(c)⇒(b) Nach Voraussetzung gilt für alle $d\in\mathbb{N}$

$$H_B^0(d) \leqslant \sum_{i+j=d} H_A^0(i) H_{B_0}^0(j).$$

Wir haben zu zeigen, daß für jedes d Gleichheit eintritt.

Summieren liefert

$$\sum_{d=0}^{\infty} H_B^0(d) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} H_A^0(i)\cdot \sum_{j=0}^{\infty} H_{B_0}^0(j)$$

Die linke Seite ist gleich $l(B)$, die rechte Seite gleich $l(A)\cdot l(B_0)$. Da A, B (und B_0) artinsch sind, sind diese Größen endlich. Es bleibt $l(B) = l(A)\cdot l(B_0)$ zu beweisen. Betrachten wir eine Kompositionsreihe $A=M_0\supset M_1\supset\ldots\supset M_r=(0)$ von A. Es muß $M_i/M_{i+1}\cong A/m$ für alle i gelten. Da B flach ist, erhalten wir

$B=M_0\otimes_A B\supset M_1\otimes_A B\supset\ldots\supset M_r\otimes_A B=(0)$ mit $M_i\otimes_A B/M_{i+1}\otimes_A B\cong A/m\otimes_A B= B/mB= B_0$.
Es folgt $l(B)= r\bullet l(B_0)= l(A)\bullet l(B_0)$.

(b)⇒(a) $H^0_B\geq H^0_A H^0_{B_0}$ impliziert $H^1_B\geq H^1_A H^0_{B_0}$ (Multiplikation mit $(1-T)^{-1}= \sum_{i=0}^{\infty} T^i$, was eine Reihe mit positiven Koeffizienten ist).
Die umgekehrte Ungleichung ist Satz (1.8.i).

Q.E.D.

(1.13) BEMERKUNGEN

Die bisherigen Aussagen zur tangentialen Flachheit sind zum Teil nicht voll befriedigend. Insbesondere gelingt es nicht, aus der tangentialen Flachheit eines Homomorphismus dessen Flachheit zu folgern. Man kann lediglich einige Abschwächungen hiervon zeigen. wir müssen uns daher auf eine speziellere Klasse von Filtrationen, die sogenannten stark separierten Filtrationen einschränken.

Wir bemerken, daß eine Filtration F auf einem lokalen Ring *separiert* heißt, wenn $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^d= (0)$ gilt und ein separiert filtrierter lokaler Ring A *vollständig* heißt, wenn er mit seiner Vervollständigung $A^\wedge:= \varprojlim_d A/F^d_A$ übereinstimmt.

(1.14) DEFINITION

Sei A ein lokaler Ring und F_A eine Filtration auf A. F_A heißt *stark separiert*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^d_A M= (0)$ für jeden endlichen A-Modul M.

(ii) $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^d_A (A/I)= (0)$ für jedes Ideal von A.

(iii) Für jede gegebene Potenz m^k des maximalen Ideals m von A gibt es eine natürliche Zahl d mit

$F^d_A\subseteq m^k$.

B e w e i s der Äquivalenz der obigen Bedingungen: (i)⇒(ii) trivial

(ii)⇒(iii) Sei $I= m^k$. Dann ist A/I artinsch, das heißt $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^d_A(A/I)= (0)$ impliziert $F^d_A(A/I)= (0)$ für $d\gg 0$. Dies bedeutet $F^d_A\subseteq I= m^k$.

(iii)⇒(i) Nach Voraussetzung gilt $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^d_A M\subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} m^k M$. Damit folgt die Behauptung aus dem Krullschen Durchschnittssatz ([Ma], Theorem 8.10).

Q.E.D.

(1.15) BEISPIELE

a) Sei A ein filtrierter lokaler Ring derart, daß $R(A):=\bigoplus_{d=0}^{\infty} F_A^d$ noethersch ist. Dann ist F_A stark separiert.

B e w e i s: $N\in\mathbb{N}$ sei so gewählt, daß $R(A)$ über $R(A)(0)=A$ von homogenen Elementen vom Grade höchstens N erzeugt wird. Dies liefert

$$F_A^{kN}=\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_r=kN\\ 0<i_\nu\leqslant N}} F_A^{i_1}\bullet\ldots\bullet F_A^{i_r}.$$

Es muß offenbar $r\geqslant k$ bei jedem Summanden gelten, woraus $F_A^{kN}\subseteq m^k$ folgt.

Q.E.D.

b) Sei (A,m) ein filtrierter lokaler Ring und E eine filtrierende Familie derart, daß F_A die E-Filtratiom ist, die durch ein gewisses N-Tupel $x=(x_1,\ldots,x_N)$ von Elementen $x_i\in m$ definiert wird. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

(i) F_A ist stark separiert.

(ii) F_A ist separiert.

(iii) $\lim\limits_{l\to\infty} \min\{a_1+\ldots+a_N:\ x_1^{a_1}\bullet\ldots\bullet x_N^{a_N}\in F_A^d\setminus\{0\}\}=\infty.$

B e w e i s: (iii)⇒(i) Sei eine Potenz m^k vorgegeben. Dann existiert eine natürliche Zahl d derart, daß $x_1^{a_1}\bullet\ldots\bullet x_N^{a_N}\in F_A^d\setminus\{0\}$ $a_1+\ldots a_N\geqslant k$, also $x_1^{a_1}\bullet\ldots\bullet x_N^{a_N}\in m^k$ impliziert. Da diese Monome F_A^d erzeugen, gilt $F_A^d\subseteq m^k$.

(i)⇒(ii) trivial

(ii)⇒(iii) Da die Filtration F_A absteigt, ist die Funktion f mit

$f(d):=\min\{a_1+\ldots+a_N:\ x_1^{a_1}\bullet\ldots\bullet a_N^{a_N}\in F_A^d\setminus\{0\}\}$

monoton wachsend. Angenommen, es wäre $\lim\limits_{d\to\infty} f(d)\neq\infty$. Dann gibt es ein $d_0\in\mathbb{N}$ derart, daß f(d) für $d\geqslant d_0$ konstant ist. Dies bedeutet, für alle $d\geqslant d_0$ gibt es ein Monom in $x_1,\ldots,x_N$ vom Grade $f(d_o)$, das in $F^d\setminus\{0\}$ liegt. Da es nur endlich viele solche Monome gibt, gehört eines, sagen wir $x_1^{b_1}\bullet\ldots\bullet x_N^{b_N}$, zu unendlich vielen $F_A^d\setminus\{0\}$. Doch dann gilt $0\neq x_1^{b_1}\bullet\ldots\bullet x_N^{b_N}\in\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F_A^d$ im Widerspruch zur Annahme.

Q.E.D.

Ist E eine filtrierende Familie mit

$\lim\limits_{d\to\infty}\min\{a_1+\ldots+a_N:\ (a_1,\ldots,a_N)\in E_d\}=\infty,$

so sind alle E-Filtrationen (stark) separiert. Wir nennen dann E eine *separiert filtrierende Familie*.

c) Sei (A,m) ein (im Sinne der kanonischen Filtrationen) vollständiger lokaler Ring und F_A eine separierte Filtration auf A. Dann ist F_A stark separiert nach dem Satz von Chevalley ([Ma], Exercise 8.7).

(1.16)PROPOSITION

Sei $f:(A,m)\to(B,n)$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe, wobei F_A und F_B stark separiert seien. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist tangential flach.

(ii) f ist flach, $gr(B/F_A^1B)$ ist flach über A/F_A^1 und es gilt $gr(IB,B)= gr(I,A)\cdot gr(B)$, wenn I eines der Ideale F_A^d mit $d\in\mathbb{N}$ ist.

(iii) f ist flach und es gilt $gr(IB,B)= gr(I,A)\cdot gr(B)$ für $I=m$ und wenn I eines der Ideale F_A^d mit $d\in\mathbb{N}$ ist.

B e w e i s (vgl. [He-2], Theoreme (3.2) und (3.4), wo bessere Ergebnisse bewiesen werden): (i)⇒(ii) Wegen Folgerung (1.12.iii) und Satz (1.8.ii.c) bleibt nur die Flachheit von f zu beweisen. Nach Folgerung (1.12.iv) ist $(B/F_A^dB)^\wedge$ flach über A/F_A^d. Da F_B stark separiert ist, betrachten wir eigentlich die n-adische Vervollständigung, das heißt $(B/F_A^dB)^\wedge$ ist treuflach über B/F_A^dB ([Ma], Theorem 8.14). Folglich ist B/F_A^dB flach über A/F_A^d für alle $d\in\mathbb{N}$. Da F_A stark separiert ist, ist B/m^kB flach über A/m^k für alle $k\in\mathbb{N}$ (siehe (1.14.iii)). Nach dem lokalen Kriterium der Flachheit ([Ma], Theorem 22.3) ist $f:A\to B$ flach.

(ii)⇒(i) Wir wollen die Bedingungen von Satz (1.8.ii.d) beweisen. $gr(B/F_A^1B)$ ist flach über A/F_A^1 nach Voraussetzung. Da $f:A\to B$ flach ist, sind die kanonischen Surjektionen $gr_{F_A}(A)\otimes_A B\to gr_{F_A}(B)$ und $gr_{F_A}(A)\otimes_A B(k)\to gr_{F_A}(B)\otimes_B B(k)$ bijektiv. Schließlich implizieren die Identitäten $gr(F_A^iB,B)= gr(F_A^i,A)\cdot gr(B)$

$$F_A^iB\cap F_B^{i+k+1}= F_A^iF_B^{k+1}+ F_A^{i+1}B\cap F_B^{i+k+1},$$

also $D(i,k)= 0$ für alle $i,k\in\mathbb{N}$ nach dem folgenden Lemma (1.17.ii).

(ii)⇔(iii) Wir haben zu zeigen, daß Flachheit von $gr(B/F_A^1B)$ über A/F_A^1 äquivalent zu $gr(mB,B)= gr(m,A)\cdot gr(B)$ ist.

Ersteres ist nach Bemerkung (1.10) äquivalent zur Flachheit von $A/F_A^1\to B/F_A^1B+F_B^d$ für alle $d\in\mathbb{N}$. Da $A/F_A^1\to B/F_A^1B$ flach ist, bedeutet dies nach [Ma], Theorem 22.5 gerade, daß

$$(F_A^1B+F_B^d/F_A^1B\hookrightarrow B/F_A^1B)\otimes_A A/m$$

injektiv ist. Hierzu äquivalent ist $(F_A^1B+F_B^d)\cap mB= mF_B^d+F_A^1B$, also $mB\cap F_B^d\subseteq mF_B^d+ F_A^1B$ und $mB\cap F_B^d= mF_B^d+ F_A^1B\cap F_B^d$.

Die zweite Bedingung bedeutet nach dem folgenden Lemma (1.17.i) gerade

$$mB\cap F_B^d = \sum_{\substack{r+s=d\\ r>0}} F_A^r F_B^s + mF_B^d.$$

Ferner können wir $gr(F_A^1 B,B)= gr(F_A^1,A)\bullet gr(B)$ annehmen, was analog

$$F_A^1 B\cap F_B^d = \sum_{\substack{r+s=d\\ r>0}} F_A^r F_B^s + F_A^1 F_B^d$$

für alle $d\in\mathbb{N}$ liefert. Die zweite Bedingung ist also zu $mB\cap F_B^d = F_A^1 B\cap F_B^d + mF_B^d$ äquivalent. Dies liefert die Behauptung.

Q.E.D.

(1.17) LEMMA

Sei $f:(A,m)\rightarrow(B,n)$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe, wobei F_B stark separiert ist.

(i) I sei ein Ideal in A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) $gr(I,A)\bullet gr(B)= gr(IB,B)$

(b) $IB\cap F_B^d = \sum_{r+s=d} (I\cap F_A^r)F_B^s$ für alle $d\in\mathbb{N}$

(ii) $gr(F_A^i,A)\bullet gr(B)= gr(F_A^i B,B)$ für alle $i\in\mathbb{N}$ impliziert

$$F_A^i B\cap F_B^{i+k+1} = F_A^i F_B^{k+1} + F_A^{i+1} B\cap F_B^{i+k+1}$$

für alle $i,k\in\mathbb{N}$.

B e w e i s (vgl. [He-2], Lemma (3.3.1)): (i) Nach Folgerung (1.12.iii) ist (a) zu $IB\cap F_B^d = \sum_{r+s=d} (I\cap F_A^r)F_B^s + IB\cap F_B^{d+1}$ für alle $d\in\mathbb{N}$ äquivalent. (b)$\Rightarrow$(a) ist somit trivial.

(a)$\Rightarrow$(b) Iterieren der obigen Identität liefert $IB\cap F_B^d = \sum_{r+s=d} (I\cap F_A^r)F_B^s + IB\cap F_B^l$ für beliebiges $l\in\mathbb{N}$. Ein Summand auf der rechten Seite ist IF_B^d. Für diesen gilt mit gewissen $p,q,l\in\mathbb{N}$

$$IF_B^d \supseteq n^p(IB)\supseteq IB\cap n^q \supseteq IB\cap F_B^l,$$

was die Behauptung liefert. Wir haben hierbei die Koendlichkeit von F_B, das Lemma von Artin-Rees und die starke Separiertheit von F_B ausgenutzt.

(ii) Nach (i) erhalten wir

$$F_A^i B\cap F_B^{i+k+1} = \sum_{\substack{r+s=i+k+1\\ r\geqslant i}} F_A^r F_B^s$$

und

$$F_A^{i+1} B\cap F_B^{i+k+1} = \sum_{\substack{r+s=i+k+1\\ r\geqslant i+1}} F_A^r F_B^s,$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Q.E.D.

(1.18) SATZ

Sei $f:(A,m)\to(B,n)$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe mit der Faser $B_0 = B/mB$. A sei artinsch, F_B separiert und B vollständig. Wir wählen für jedes $d\in\mathbb{N}$ eine Familie $(b_{d,j})_{j\in J_d}$ von Elementen aus F_B^d, deren Restklassen eine A/m-Vektorraumbasis von $gr^d(B_0)$ bilden. Die Elemente $b_{d,j}$ definieren dann einen A-Modul-Homomorphismus

$$g: \prod_{d=0}^{\infty}\Big(\bigoplus_{j\in J_d} A\Big)\to B \quad , \qquad (a_{d,j})_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ j\in J_d}} \mapsto \sum_{d,j} a_{d,j}b_{d,j}.$$

Es gilt

(i) g ist surjektiv.

(ii) $f:A\to B$ ist genau dann flach, wenn g bijektiv ist.

(iii) Ist $f:A\to B$ flach, so betrachten wir folgende Aussagen.

(a) $f:A\to B$ ist tangential flach.

(b) Für jedes $k\in\mathbb{N}$ gilt $F_B^k = \prod_{d=0}^{\infty}\bigoplus_{j\in J_d} F_A^{k-d}b_{d,j}$.

(c) Für jedes Element $b=\sum_{d,j} a_{d,j}b_{d,j}$ von B gilt $\mathrm{ord}_{F_A}(a_{d,j})\geq \mathrm{ord}_{F_B}(b)- d$ für alle $d\in\mathbb{N}$ und $j\in J_d$.

(d) Es gibt Elemente $a_{d,j}^{e,e',k,k'}\in F_A^{e+e'-d}$, so daß

$$b_{e,k}\cdot b_{e',k'} = \sum_{d,j} a_{d,j}^{e,e',k,k'} b_{d,j}$$

gilt für alle $e,e'\in\mathbb{N}$, $k\in J_e$ und $k'\in J_{e'}$.

Dann sind die Aussagen (a), (b) und (c) äquivalent und implizieren (d).

B e w e i s: Zunächst bemerken wir, nach Beispiel (1.15.c) ist F_B und daher auch F_{B_0} stark separiert.

In den Reihen $\sum_{d,j} a_{d,j}b_{d,j}$ stehen für jedes d nur endich viele Summanden, die jeweils dem Ideal F_B^d angehören. Da B vollständig ist, konvergieren die Reihen, wobei die Limites eindeutig bestimmt sind, denn F_B ist separiert. g ist also wohldefiniert.

(i) Da A artinsch ist, ist m nilpotent. Es genügt also, $B\subseteq \mathrm{im}(g)+ mB$ zu zeigen, das heißt die Surjektivität von $g\otimes_A A/m$. Da m endlich erzeugt ist, kommutiert der Funktor $\otimes_A A/m$ mit direkten (Summen und) Produkten.

Wir erhalten

$$g\otimes_A A/m: \prod_{d=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{j\in J_d} A/m\Big) \to B/mB = B_0 \quad , \qquad (\overline{a_{d,j}})_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ j\in J_d}} \mapsto \sum_{d,j} \overline{a_{d,j}}\bullet\overline{b_{d,j}} \ ,$$

wobei die Querstriche Restklassen modulo m bzw. mB andeuten. Da F_{B_0} separiert ist, sind die Limites der angegebenen Reihen eindeutig, $g\otimes_A A/m$ wird also durch sie bereits bestimmt. Nach Wahl der $b_{d,j}$ gilt

$$F_{B_0}^{d} = \sum_{j\in J_d} A/m\bullet b_{d,j} + F_{B_0}^{d+1}.$$

Jedes Element von B lässt sich somit in Gestalt einer Reihe $\sum_{d=0}^{\infty} \big(\sum_{j\in J_d} \overline{a_{d,j}}\bullet\overline{b_{d,j}}\big)$ mit Koeffizienten aus A/m schreiben, wobei die inneren Summen endlich sind. Also ist $g\otimes A/m$ surjektiv.

(ii) Sei $f: A\to B$ flach. Wir wollen zunächst beweisen, daß $g\otimes A/m$ bijektiv ist. Es ist zu zeigen, aus $\sum_{d,j} \overline{a_{d,j}}\bullet\overline{b_{d,j}} = 0$ mit $\overline{a_{d,j}} \in A/m$ folgt $\overline{a_{d,j}} = 0$ für alle (d,j). Angenommen, dies sei nicht so. (d',j') sei ein Paar mit minimaler erster Komponente und $\overline{a_{d',j'}} \neq 0$. Dann muß gelten $\sum_{j\in J_{d'}} \overline{a_{d',j}}\bullet\overline{b_{d',j}} \in F_{B_0}^{d'+1}$, woraus sich nach der Wahl der $b_{d,j}$ aber $\overline{a_{d',j'}} = 0$ und ein Widerspruch ergibt.

Sei nun K der Kern von g. Wir erhalten eine exakte Sequenz von A-Moduln

$$0\to K\to \prod_{d=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{j\in J_d} A\Big) \xrightarrow{g} B\to 0.$$

Tensorieren mit A/m über A liefert wieder eine exakte Sequenz

$$0\to K/mK\to \prod_{d=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{j\in J_d} \quad \Big) \xrightarrow{g\otimes A/m} B/mB\to 0.$$

Man beachte hierbei, daß wegen der Flachheit von B über A $\mathrm{Tor}_1^A(B,A/m) = 0$ gilt. Es muß also $K/mK = 0$ und folglich $K = 0$ gelten, denn m ist nilpotent. Also ist g bijektiv.

Sei nun g bijektiv. Dann ergibt sich die A-Flachheit von B daraus, daß direkte Produkte flacher Moduln flach sind ([Ma], Exercise 7.4).

(iii) (a)$\Rightarrow$(c) Wir bemerken zunächst, die tangentiale Flachheit von f liefert nach (1.12.iii)

$$\begin{aligned} gr(B_0) &= gr(B)/gr(mB,B) \\ &= gr(B)/gr(m,A)gr(B) \\ &= gr(B)\otimes_{gr(A)} gr(A)/gr(m,A). \end{aligned}$$

Ferner ist $gr(m,A)$ ein nilpotentes Ideal in $gr(A)$, da m nilpotent

ist. Ist also M ein gr(A)-Modul, so verschwindet
$M\otimes_{gr(A)}gr(A)/gr(m,A)= M/gr(m,A)M$ nur dann, wenn $M= 0$ gilt.

Wir betrachten nun den Homomorphismus graduierter gr(A)-Moduln

$$\hat{g}: \bigoplus_{d,j} gr(A)[-d]\to gr(B) \quad , \quad (a_{d,j})_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ j\in J_d}} \mapsto \sum_{d,j} a_{d,j}\bullet(b_{d,j} \bmod F_B^{d+1})$$

und wollen zeigen, daß er ein Isomorphismus ist. Aufgrund der Wahl der $b_{d,j}$ ist zunächst

$$\hat{g}\otimes_{gr(A)}gr(A)/gr(m,A): \bigoplus_{d,j} A/m[-d]\to gr(B_0) \ ,$$

$$(\overline{a_{d,j}})_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ j\in J_d}} \mapsto \sum_{d,j} \overline{a_{d,j}}\bullet(\overline{b_{d,j} \bmod F_{B_0}}^{d+1})$$

ein Isomorphismus. Damit gilt

$$0= \operatorname{coker}(\hat{g}\otimes_{gr(A)}gr(A)/gr(m,A))= (\operatorname{coker}\hat{g})\otimes_{gr(A)}gr(A)/gr(m,A),$$

das heißt $\operatorname{coker}\hat{g} = 0$, so daß $\hat{g}$ surjektiv ist. Nun ist folgende Sequenz exakt.

$$0\to \ker \hat{g} \to \bigoplus_{d,j} gr(A)[-d]\xrightarrow{\hat{g}} gr(B)\to 0.$$

Tensorieren mit gr(A)/gr(m,A) liefert wiederum eine exakte Sequenz

$$0\longrightarrow (\ker \hat{g})\otimes_{gr(A)} gr(A)/gr(m,A)\longrightarrow \cdots$$

$$\cdots\longrightarrow \bigoplus_{d,j} A/m[-d]\xrightarrow{\hat{g}\otimes_{gr(A)}gr(A)/gr(m,A)} gr(B_0)\to 0.$$

Man beachte, wegen der tangentialen Flachheit von f gilt

$$\operatorname{Tor}_1^{gr(A)}(gr(A)/gr(m,A),\ gr(B))= 0.$$

Wir erhalten $(\ker \hat{g})\otimes_{gr(A)}gr(A)/gr(m,A)= 0$, also $\ker \hat{g} = 0$, so daß $\hat{g}$ auch injektiv ist.

Betrachten wir nun Aussage (c). Wir nehmen indirekt an, es sei
$b= \sum_{d,j} a_{d,j}b_{d,j}$ mit $\min_{d,j} (\operatorname{ord}_{F_A}(a_{d,j})+d)= l< \operatorname{ord}_{F_B}(b)$. Bezeichne

$$b' := \sum_{d,j}{}' a_{d,j}b_{d,j}$$

die Summe über alle Paare (d,j), wo dieses Minimum angenommem wird. Es genügt offenbar $\operatorname{ord}_{F_B}(b')= l$ zu zeigen. Tatsächlich ist $b'\in F_B^l$ und

$$b' \bmod F_B^{l+1}= \sum_{d,j}(a_{d,j} \bmod F_A^{l-d+1})\bullet(b_{d,j} \bmod F_B^{d+1})\neq 0,$$

da $\hat{g}$ bijektiv ist.

(c)⇒(b) Wir haben lediglich $F_B^k\subseteq \prod_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{j\in J_d} F_A^{k-d}\bullet b_{d,j}$ zu zeigen, denn die umgekehrte Inklusion folgt aus der Abgeschlossenheit von F_B^k bezüglich der durch F_B auf B induzierten Topologie. Sei $b\in F_B^k$. Nach

(i) gibt es eine Darstellung $b=\sum_{d,j} a_{d,j} b_{d,j}$, wobei nach (c) gelten muß

$$\mathrm{ord}_{F_A}(a_{d,j}) \geqslant \mathrm{ord}_{F_B}(b)-d \geqslant k-d.$$

Dies liefert $b \in \prod_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{j\in J_d} F_A^{k-d} \bullet b_{d,j}$.

(b)⇒(a) g induziert Isomorphismen

$$\prod_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{j\in J_d} \mathrm{gr}^{k-d}(A) \to \mathrm{gr}^{k}(B).$$

Hierbei gilt $\prod_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{j\in J_d} \mathrm{gr}^{k-d}(A)= \bigoplus_{d=0}^{k} \bigoplus_{j\in J_d} \mathrm{gr}^{k-d}(A)= \bigoplus_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{j\in J_d} \mathrm{gr}^{k-d}(A)$.

Zusammengesetzt erhalten wir einen Isomorphismus von gr(A)-Moduln

$$\bigoplus_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{j\in J_d} \mathrm{gr}(A)[-d] \to \mathrm{gr}(B).$$

Der gr(A)-Modul gr(B) ist somit frei, also auch flach.

(c)⇒(d) Wegen (i) kann man die Koeffizienten wenigstens so wählen, daß sie in A liegen. Nach (c) liegen sie in den angegebenen Idealen.

Q.E.D.

(1.19) BEISPIEL

Seien K ein Körper und a,b,c,d,X,Y,Z Unbestimmte. Wir setzen

$A:= K[[a,b,c,d]]/(b^2,bc)$,

$B:= A[[X,Y,Z]]/(f_1,f_2,f_3,f_4)$

mit

$f_1:= X^2+aX,\ f_2:= XY+bX,\ f_3= Y^2+cY,\ f_4:= Z^3+d.$

F sei die durch $x:= (a,b,c,d,X,Y,Z)$ auf $K[[a,b,c,d,X,Y,Z]]$ definierte q-Filtration mit $q:= (1,1,1,1,1,1,\frac{1}{e})$ und $e\in\{1,2\}$. F_B sei die Bildfiltration von F, F_A die Bildfiltration der Einschränkung von F auf $K[[a,b,c,d]]$.

Dann ist B flach über A, jedoch nicht tangential flach.

Zum Beweis der Flachheit benötigen wir das folgende Lemma.

(1.20) LEMMA

Sei $f:(A,m)\to(R,M)$ ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Ringe, $s\in R^n$ ein n-Tupel von Elementen aus R und $I:= sR$ das von diesen erzeugte Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $B:= R/I$ ist flach über A.

(ii) Jede Relation modulo mR von s läßt sich zu einer Relation von s anheben, das heißt für jedes n-Tupel $r\in R^n$ mit $\langle r,s\rangle \equiv 0 \bmod mR$

existiert ein $r' \in R^n$ mit $\langle r', s\rangle = 0$ und $r' \equiv r \bmod mR^n$.

B e w e i s des Lemmas (vgl. [T]): Aussage (i) ist nach [Ma], Theorem 22.5 äquivalent zur Injektivität von $(I \hookrightarrow R) \otimes_A A/m$, also zu $mI = mR \cap I$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Es gilt $\langle r,s\rangle \in mR \cap I = mI$, das heißt es gibt ein n-Tupel $x \in R^n$ von Elementen aus mR mit $\langle r,s\rangle = \langle x,s\rangle$. Man kann $r' := r-x$ setzen.

(ii)$\Rightarrow$(i) Es genügt offenbar $mR \cap I \subseteq mI$ zu zeigen. Sei $a \in mR \cap I$. Dann gilt $a = \langle r,s\rangle$ mit einem gewissen n-Tupel $r \in R^n$. Wegen $\langle r,s\rangle = a \equiv 0 \bmod mR$ gibt es ein $r' \in R^n$ mit $\langle r', s\rangle = 0$ und $r' \equiv r \bmod mR^n$. Es folgt

$a = \langle r,s\rangle = \langle r-r', s\rangle \in mI.$

Q.E.D.

B e w e i s der Aussage des Beispiels (1.19): Zeigen wir zunächst die Flachheit von B über A. Sei $R := A[[X,Y,Z]]$ und $I := (f_1, f_2, f_3, f_4)R$. Die $f_{j0} := (f_j \bmod mR)$ betrachten wir als Elemente von $R_0 := K[[X,Y,Z]]$ und haben Erzeugende r_{i0} ihres Syzygienmoduls anzuheben. (Triviale Syzygien lassen sich offenbar anheben. Wir lassen sie daher weg.)

Die Behauptung ergibt sich nun aus der folgenden Tabelle.

f_{j0}	X^2	XY	Y^2	Z^3
f_j	X^2+aX	$XY+bX$	Y^2+cY	Z^3+d
r_{10}	Y	$-X$		
r_1	$Y+b$	$-X-a$		
r_{20}		Y	$-X$	
r_2		$Y-b+c$	$-X$	

Angenommen, B wäre tangential flach. Nach Basiswechsel können wir annehmen, es wäre $A = K[[a,b,c,d]]/(a,b,c,d)^2$ ein artinscher Ring. Dann müßte die Aussage (d) von Satz (1.18.iii) gelten. Wir bemerken, hier ist $B_0 = K[[X,Y,Z]]/(X^2, XY, Y^2, Z^3)$.

Sei e= 1. Als Familien im Sinne von Satz (1.18) wählen wir $\{1\}$, $\{X,Y,Z\}$, $\{XZ,YZ,Z^2\}$, $\{XZ^2,YZ^2\}$, $\emptyset$, ... $Z \bullet Z^2 = -d \bullet 1$ mit $\mathrm{ord}(Z) = 1$, $\mathrm{ord}(Z^2) = 2$, $\mathrm{ord}(1) = 0$ erfordert $\mathrm{ord}_{F_A}(-d) \geq 3$.

Sei e= 2. Als Familien im Sinne von Satz (1.18) wählen wir $\{1,Z\}$, $\{X,Y,XZ,YZ,Z^2\}$, $\{XZ^2,YZ^2\}$, $\emptyset$, ... $Z^2 \bullet Z^2 = -d \bullet Z$ mit $\mathrm{ord}(Z^2) = 1$, $\mathrm{ord}(Z) = 0$ erfordert $\mathrm{ord}_{F_A}(-d) \geq 2$.

Wir haben in beiden Fällen Widersprüche erhalten.

Q.E.D.

(1.21) SATZ

Sei $f:(A,m)\to(B,n)$ ein flacher lokaler Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe mit der Faser B_0, wobei F_B stark separiert ist. f ist tangential flach genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes $a\in A$ und jedes $b\in B$ mit $\mathrm{ord}_{F_B}(b)=\mathrm{ord}_{F_{B_0}}(b_0)$ gilt

$\mathrm{ord}_{F_B}(ab)=\mathrm{ord}_{F_A}(a)+\mathrm{ord}_{F_B}(b)$.

Dabei bezeichnet b_0 die Restklasse von b in B_0.

(ii) Bedingung (i) bleibt erhalten, wenn man f durch $f\otimes_A A/I$ für jedes echte Ideal $I\subset A$ ersetzt.

B e w e i s (vgl. [He-2], Theorem (5.2)): Sei f tangential flach. Nach Folgerung (1.12.i) genügt es (i) zu beweisen. Seien also $a\in A$, $b\in B$ wie in der Voraussetzung gewählt. Wir können

$$k:=\mathrm{ord}_{F_A}(A)<\infty \quad,\quad l:=\mathrm{ord}_{F_B}(b)=\mathrm{ord}_{F_{B_0}}(b_0)<\infty$$

annehmen. Es sei bemerkt, daß die Ungleichung "$\geqslant$" trivialerweise gilt. Ersetzt man f durch $f\otimes_A A/F_A^{k+l+1}$, so bleiben alle Voraussetzungen des Satzes erhalten, ebenso die Ordnungen auf der rechten Seite, während die Ordnung auf der linken Seite wachsen kann. Wir können daher A artinsch annehmen. Ersetzt man B durch dessen Vervollständigung $B^\wedge$ (die wegen der starken Separiertheit mit der n-adischen Vervollständigung übereinstimmt), so bleiben ebenfalls alle Voraussetzungen (man beachte, $B\hookrightarrow B^\wedge$ ist flach) und alle Ordnungen erhalten. Wir können B daher vollständig annehmen und somit Satz (1.18) anwenden.

b gehört zu einem gewissen System $(b_{d,j})_{d\in\mathbb{N},\,j\in J_d}$ im Sinne dieses Satzes. Aussage (iii.c) liefert $\mathrm{ord}_{F_A}(a)\geqslant\mathrm{ord}_{F_B}(ab)-\mathrm{ord}_{F_B}(b)$, also die Behauptung.

Die Umkehrung wird im Folgenden nicht benötigt. Wir verzichten daher auf den Beweis und verweisen auf [He-2].

Q.E.D.

(1.22) BEISPIEL

Seien K ein Körper und a,b,c,d,X,Y,Z Unbestimmte. Wir setzen

$A:=K[[a,b,c,d]]/(b^2,bc)$

$B:=A[[X,Y,Z]]/(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)$

mit

$f_1 := X^2+aX$, $f_2 := XY+bX$, $f_3 := Y^2+cY$, $f_4 := XZ^2+dX$, $f_5 := Z^3+dZ$.
F_A und F_B seien die kanonischen Filtrationen.
Dann ist B flach über A, jedoch nicht tangential flach.

B e w e i s: Wir zeigen die Flachheit nach Lemma (1.20). Sie ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

f_{j0}	X^2	XY	Y^2	XZ^2	Z^3
f_j	X^2+aX	$XY+bX$	Y^2+cY	XZ^2+dX	Z^3+dZ
r_{10}	Y	$-X$			
r_1	$Y+b$	$-X-a$			
r_{20}	Z^2			$-X$	
r_2	Z^2+d			$-X-a$	
r_{30}		Y	$-X$		
r_3		$Y-b+c$	$-X$		
r_{40}		Z^2		$-Y$	
r_4		Z^2+d		$-Y-b$	
r_{50}				Z	$-X$
r_5				Z	$-X$

Hier gilt $B_0 = K[[X,Y,Z]]/(X^2,XY,Y^2,XZ^2,Z^3)$. Man erhält $\mathrm{ord}_{F_B}(X) = \mathrm{ord}_{F_{B_0}}(X) = 1$ und $\mathrm{ord}_{F_A}(d) = 1$. Wäre nun f tangential flach, so müßte nach Satz (1.21) gelten

$$2 = \mathrm{ord}_{F_B}(dX) = \mathrm{ord}_{F_B}(-XZ^2) \geqslant 3.$$

Q.E.D.

(1.23) DEFINITIONEN

Sei A ein filtrierter lokaler Ring und $x \in A$ ein Element. Die *Anfangsform* von x in gr(A) ist definiert durch

$$\mathrm{in}_{F_A}(x) = \mathrm{in}(x) := (x \bmod F_A^{d+1})$$

falls $d := \mathrm{ord}(x)$ endlich ist und durch

$$\mathrm{in}_{F_A}(x) = \mathrm{in}(x) := 0$$

sonst.

Sei I ein Ideal im filtrierten lokalen Ring A. Eine *Standardbasis* von I ist eine Familie $r = (r_j)_{j \in J}$ von Elementen aus I derart, daß die assoziierte Familie $\mathrm{in}(r) := (\mathrm{in}(r_j))_{j \in J}$ der Anfangsformen in gr(A) das Anfangsformenideal gr(I,A) erzeugt.

(1.24) SATZ

Sei $f:(A,m)\to(R,M)$ ein tangential flacher Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe, wobei F_R stark separiert sei, und I ein Ideal in R mit der Eigenschaft, daß $B:=R/I$ flach über A ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) B ist tangential flach über A.

(ii) Die kanonische Abbildung

$gr(I,R)\to gr(I \bmod mR, R/mR)$

ist surjektiv.

(iii) Es gibt eine Standardbasis r_0 des Ideals $I_0:= I \bmod mR$ in R/mR, die angehoben werden kann zu einer Folge r von Elementen aus I mit $\mathrm{ord}_{F_{R_0}}(r_{0j})=\mathrm{ord}_{F_R}(r_j)$ für alle j

(in welchem Falle jede solche Anhebung von jeder Standardbasis r_0 von I_0 eine Standardbasis von I ist).

B e w e i s: Siehe [He-2], Theorem (3.6), wo eine etwas allgemeinere Situation behandelt wird.

Q.E.D.

(1.25) BEISPIEL

Sei (A,m) ein filtrierter lokaler Ring. Wir setzen

$B:=R/I,\ R:=A[[X,Y,Z]],\ I:=(f_1,f_2,f_3)$

mit

$f_1:=X^2+a_1X+a_2Y+a_3Z+a_4,$

$f_2:=XY+b_1X+b_2Y+b_3Z+b_4,$

$f_3:=Z^2+c_1X+c_2Y+c_3Z+c_4$

und $a_i,b_i,c_i\in F_A^1$. F_R sei so gewählt, daß

(i) die kanonische Abbildung $i:A\to R$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe ist,

(ii) F_R stark separiert ist,

(iii) die Bildfiltration F_{R_0} auf $R_0=A/m[[X,Y,Z]]$ die durch (X,Y,Z) definierte q-Filtration mit $q=(1,1,\frac{1}{2})$ ist.

F_B sei die Bildfiltration von F_R.

Dann ist $f:A\to B$ genau dann flach, wenn $a_2=0$, $a_3=0$, $b_3=0$ sowie $b_4=b_1b_2$ und $a_4=(a_1-b_2)b_2$ gilt.

In diesem Falle ist f sogar tangential flach.

B e w e i s: Wir wollen die Flachheit nach Lemma (1.20) untersuchen. Wir erhalten folgende Tabelle

f_{j0}	X^2	XY	Z^2
f_j	$X^2+a_1X+a_2Y+a_3Z+a_4\vdash\vdash\vdash$	$XY+b_1X+b_2Y+b_3Z+b_4\vdash\vdash\vdash$	$Z^2+c_1X+c_2Y+c_3Z+c_4$
r_0	Y	$-X$	

Eine einfache Rechnung zeigt nun

$$\begin{aligned}\langle r_0,f\rangle = & -b_1f_1+(a_1-b_2)f_2-d_1X+(a_2b_1+d_2)Y+[b_1a_3+(b_2-a_1)b_3]Z+a_2Y^2\\ & -b_3XZ+a_3YZ+(b_2-a_1)d_1+b_1d_2\end{aligned}$$

mit $d_1 := b_4-b_1b_2$ und $d_2 := a_4-(a_1-b_2)b_2$.

Sind also die Behauptungen erfüllt, so läßt sich r_0 anheben, das heißt f ist flach.

Sei nun f flach, dann läßt sich r_0 anheben. Hieraus ergibt sich die Behauptung, wenn man zeigt, daß $1,X,Y,Z,Y^2,XZ,YZ\in B$ über A linear unabhängig sind. Da B flach über A ist, ist dafür hinreichend, daß deren Bilder in B/mB über A/m linear unabhängig sind ([Ma], Theorem 7.10).

Dies gilt jedoch wegen $B/mB\cong A/m[[X,Y,Z]]/(X^2,XY,Z^2)$.

Wir wollen nach Satz (1.24.iii) die tangentiale Flachheit von f zeigen. Dazu benötigen wir eine Standardbasis des Ideals $I_0= (X^2,XY,Z^2)$ in $R_0= A/m[[X,Y,Z]]$.

Als A/m-Vektorraum gilt $gr(R_0)= A/m[X,Y,Z]$. Für die Multiplikation ergibt sich jedoch

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}\bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}=\begin{cases}X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls (*) gilt}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

mit

$$\operatorname{ord}(X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2})= \operatorname{ord}(X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1})+\operatorname{ord}(X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}) \qquad (*)$$

Wenn einer der Faktoren X^2, XY oder Z^2 ist, gilt (*) automatisch. $gr(I_0,R_0)\subseteq gr(R_0)$ wird von allen Monomen erzeugt, die (im R_0-Sinne) Vielfache von X^2, XY oder Z^2 sind. Man kann also zur Multiplikation im $gr(R_0)$-Sinne übergehen. $X^2,XY,Z^2\in gr(R_0)$ erzeugen das Ideal $gr(I_0,R_0)$.

Die Standardbasis (X^2,XY,Z^2) wird zu (f_1,f_2,f_3) angehoben. Dabei bleiben die Ordnungen erhalten. (Man beachte, wegen $d_1=0$, $d_2=0$ gilt $a_4,b_4\in F_A^2$.)

Q.E.D.

2. TANGENTIALE FLACHHEIT ALLER DEFORMATIONEN EINER SINGULARITÄT-NORMALENMODULN

(2.1) BEMERKUNG

Eine *Deformation* eines lokalen Ringes B_0 ist ein flacher lokaler Homomorphismus $f:(A,m) \to (B,n)$ lokaler Ringe mit der Faser B_0. Wegen $A/m \hookrightarrow B/mB$ hat dieser Begriff nur dann einen Sinn, wenn B_0 einen Körper enthält.

In [He-1] wurde die Frage untersucht, für welche lokalen Ringe (Singularitäten) alle Deformationen tangential flach (im Sinne kanonischer Filtrationen) sind. Es ergibt sich ein Kriterium, das diese Eigenschaft durch das Verhalten gewisser Normalenmoduln ausdrückt.

Wir wollen dies auf größere Klassen von Filtrationen verallgemeinern und Beispiele konstruieren. Das ist der eigentliche Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Dazu haben wir im Folgenden zu präzisieren, was in unserer allgemeineren Situation überhaupt unter einer Deformation zu verstehen ist. Dies betrifft insbesondere den Zusammenhang zwischen den Filtrationen F_A, F_B und F_{B_0}.

(2.2) TERMINOLOGIE

Ein Tripel, bestehend aus

(i) einem lokalen Ring (B_0,n_0),

(ii) einem r-Tupel $y_0 = (y_{10},\dots,y_{r0})$ von Elementen aus n_0, die dieses Ideal erzeugen,

(iii) einer koendlich filtrierenden Familie $E=(E_d)_{d\in N}$ mit $E_d \subseteq \mathbb{N}^r$ für alle $d \in \mathbb{N}$,

wird im Folgenden der Einfachheit halber als *monomial filtrierter lokaler Ring* angesprochen, obwohl die konkreten Daten y_0 und E eine wesentliche Rolle spielen.

Als Bezeichnungen wählen wir sowohl (B_0,y_0,E), als auch (B_0,n_0) oder B_0.

(2.3) DEFINITION

Es sei (B_0,y_0,E) ein monomial filtrierter lokaler Ring, A ein filtrierter lokaler Ring und $f:A \to B$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe mit der Faser B_0. Eine Filtration F_B auf B heißt *relative* E-*Filtration* (*bezüglich* y_0 *über* F_A), wenn für alle $d \in \mathbb{N}$

$$F_B^d = \sum_{\substack{a\in E_j \\ i+j=d}} F_A^i y^a B$$

gilt, wobei das r-Tupel $y=(y_1,\dots,y_r)$ eine Anhebung von $y_0 \in B_0^r$ ist.

(2.4) LEMMA

Seien B_0 ein monomial filtrierter lokaler Ring, A ein filtrierter lokaler Ring, $f: A \to B$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe mit der Faser B_0 und F_B eine relative E-Filtration auf B. Dann gilt

(i) F_B ist tatsächlich eine Filtration auf B.

(ii) Für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt $f(F_A^d) \subseteq F_B^d$.

(iii) Die Bildfiltration von F_B auf B_0 stimmt mit F_{B_0} überein.

(iv) Wenn E eine koendlich filtrierende Familie (vgl. (1.4.b)) ist, so ist F_B koendlich.

(v) Ist F_A stark separiert und E eine separiert filtrierende Familie (vgl. 1.15.b), so ist F_B stark separiert.

B e w e i s: (i) ergibt sich leicht aus den Definitionen der Begriffe "Filtration" und "filtrierende Familie", (ii) folgt, wenn man in (2.3) i=d und j=0 betrachtet.

(iii) Es gilt $F_B^d = \sum_{\substack{a\in E_j \\ i+j=d}} F_A^i y^a B$. Beim Übergang zur Faser verschwinden die Terme mit $i \geqslant 1$, so daß sich $\sum_{a\in E_d} y_0^a B_0 = F_{B_0}^d$ ergibt.

(iv) Sei n das maximale Ideal von B. Dann gilt $n = mB + (y_1,\dots,y_r)$. Da F_A koendlich und E koendlich filtrierend ist, gilt mit gewissen $k,l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} l(B/F_B^d) &\leqslant l(B/F_A^d B + (y_1^{kd},\dots,y_r^{kd})) \\ &\leqslant l(B/m^l B + (y_1^{kd},\dots,y_r^{kd})) \\ &\leqslant l(B/n^{krd+l}) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(v) Wir wählen eine Potenz n^r des maximalen Ideals. Wegen der starken Separiertheit gibt es ein $d_1 \in \mathbb{N}$ mit $F_A^i B \subseteq n^r$ für $i \geqslant d_1$. Da E separiert filtrierend ist, gibt es ein $d_2 \in \mathbb{N}$ mit $y^a \in n^r$ falls $a \in E_d$ mit $d \geqslant d_2$. Es folgt $F_B^{d_1+d_2} \subseteq n^r$.

Q.E.D.

(2.5) DEFINITIONEN

a) Sei (B_0, y_0, E) ein monomial filtrierter lokaler Ring.
Unter einer *Deformation* von (B_0, y_0, E) verstehen wir einen flachen

Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ filtrierter lokaler Ringe derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $(B/mB)^\wedge \cong B_0^\wedge$.

(ii) Die von F_B auf $B^\wedge$ induzierte Filtration $F_{B^\wedge}$ ist gerade eine relative E-Filtration bezüglich y_0 über F_A.

(iii) Der Homomorphismus $f\otimes_A A/F_A^1$: $A/F_A^1\to B/F_A^1B$ filtrierter lokaler Ringe ist tangential flach.

b) Sei B_0 ein monomial filtrierter lokaler Ring, der einen Körper enthält. Wir werden sagen, B_0 *hat nur tangential flache Deformationen*, wenn jede Deformation $f:A\to B$ von B_0 tangential flach ist.

(2.6) BEMERKUNGEN

a) Sei (R,M) ein filtrierter lokaler Ring. Mit $R^\wedge$ bezeichnen wir hier die M-adische Vervollständigung von R, versehen mit der von F_R induzierten Filtration $F_{R^\wedge}$.

b) Es gilt $n_0^\wedge = n_0 B_0^\wedge$, so daß $y_{10},\ldots,y_{r0}\in B_0^\wedge$ das Ideal $n_0^\wedge$ erzeugen und $B_0^\wedge = (B/mB)^\wedge = B^\wedge/mB^\wedge$, das heißt der von f induzierte Homomorphismus $f^\wedge:A\to B^\wedge$ hat die Faser $B_0^\wedge$. Damit hat Bedingung (ii) tatsächlich einen Sinn.

c) Offenbar hat auch der Begriff "Deformation" aus (2.5.a) nur dann einen Sinn, wenn B_0 einen Körper enthält.

d) Die Begriffe aus (2.5) sind im Folgenden sehr wichtig. Für die Eigenschaft eines monomial filtrierten lokalen Ringes, nur tangential flache Deformationen zu haben, streben wir ein überschaubares Kriterium an.

Beim Begriff "Deformation" gibt es gegenüber der einfachen Situation lokaler Ringe gewisse Abweichungen. Diese sind aber unwesentlich. So fordern wir statt $B/mB\cong B_0$ nur $(B/mB)^\wedge \cong B_0^\wedge$. Dies wird dadurch gerechtfertigt, daß wir uns für tangentiale Flachheit interessieren, die wegen $gr_{F_R}(R)\cong gr_{F_{R^\wedge}}(R^\wedge)$ nur von Vervollständigungen abhängt. Bedingung (ii) beschreibt den Zusammenhang zwischen den Filtrationen F_{B_0}, F_A und F_B. Wir bemerken, wenn bereits F_B eine relative E-Filtration bezüglich y_0 über F_A ist, so gilt dies erst recht auch für $F_{B^\wedge}$. (iii) ist rein technischer Natur und im (wichtigsten) Spezialfall $F_A^1=m$ trivial.

e) Wir benötigen noch etwas speziellere Klassen von Filtrationen und filtrierenden Familien. Diese werden nun eingeführt und im nachfolgenden Lemma untersucht.

(2.7) DEFINITIONEN

Eine Filtration F auf einem lokalen Ring heißt *endlich erzeugt*, wenn mit einem gewissen $h\in\mathbb{N}$

$$F^d=\sum_{\substack{s\in\mathbb{N}\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_s=d\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\leqslant h}} F^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet F^{\alpha_s}$$

für alle $d\in\mathbb{N}$ gilt.

Eine filtrierende Familie heißt *endlich erzeugt*, wenn mit einem gewissen $h\in\mathbb{N}$

$$E_d=\bigcup_{\substack{s\in\mathbb{N}\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_s=d\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\leqslant h}} (E_{\alpha_1}+\ldots+E_{\alpha_s})$$

für alle $d\in\mathbb{N}$ gilt.

(2.8) LEMMA

(a) Sei (A,m) ein lokaler Ring und $x=(x_1,\ldots,x_r)$ ein r-Tupel von Elementen aus m. Ist nun $E=(E_d)_{d\in\mathbb{N}}$ mit $E_d\subseteq\mathbb{N}^r$ für alle $d\in\mathbb{N}$ eine endlich erzeugte filtrierende Familie, so ist die durch x definierte E-Filtration endlich erzeugt.

(b) Jede endlich erzeugte filtrierende Familie ist separiert filtrierend.

(c) Sei A ein lokaler Ring und F eine Filtration auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) F ist endlich erzeugt.

(ii) F ist stark separiert und $gr_F(A)$ noethersch.

B e w e i s: (a) folgt unmittelbar aus den Definitionen.

(b) Wählt man $h\in\mathbb{N}$ wie in Definition (2.7), so gilt

$$\min\{a_1+\ldots+a_r:\ (a_1,\ldots,a_r)\in E_d\}\geqslant\frac{d}{h}\ .$$

(c) Der Ring $gr_F(A)$ ist noethersch genau dann, wenn er über $gr_F^0(A)=A/F_A^1$ endlich erzeugt ist. Dies bedeutet aber gerade mit einem gewissen $h\in\mathbb{N}$

$$F^d/F^{d+1}=\sum_{\substack{s\in\mathbb{N}\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_s=d\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\leqslant h}} F^{\alpha_1}/F^{\alpha_1+1}\bullet\ldots\bullet F^{\alpha_s}/F^{\alpha_s+1}\quad ,$$

das heißt

$$F^d = \sum_{\substack{s\in\mathbb{N} \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_s=d \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\leqslant h}} F^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet F^{\alpha_s} + F^{d+1}$$

für alle $d\in\mathbb{N}$.

(i)⇒(ii) $gr_F(A)$ ist nun offensichtlich noethersch. Für alle $k\in\mathbb{N}$ muß $F^{kh}\subseteq m^k$ gelten, so daß F auch stark separiert ist.

(ii)⇒(i) Mit der Bezeichnung

$$S^d := \sum_{\substack{s\in\mathbb{N} \\ \alpha_1+\ldots,\alpha_s=d \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\leqslant h}} F^{\alpha_1}\bullet\ldots\bullet F^{\alpha_s}$$

erhalten wir $F^d = S^d + F^l$ für $l = d+1$. Iterativ gewinnt man diese Identität für beliebig großes $l\in\mathbb{N}$. Mit Hilfe des Lemmas von Artin-Rees und der starken Separiertheit von F folgt für beliebig große $p,q\in\mathbb{N}$ $F^d\subseteq S^d+m^p$, $F^d\subseteq S^d+m^p\cap F^d$ und $F^d\subseteq S^d+m^qF^d$. Beachtet man nun, daß die Inklusion "⊇" trivialerweise auch gilt, so ergibt sich $F^d = S^d$ nach Nakayamas Lemma.

Q.E.D.

Die folgende Aussage besagt im wesentlichen, daß sich ein Homomorphismus $f:A\to B$ filtrierter lokaler Ringe, unter gewissen Voraussetzungen, als Komposition eines tangential flachen Homomorphismus und einer Surjektion darstellen läßt. Die weiteren Behauptungen sind technischer Natur und werden im Folgenden benötigt.

Es sei bemerkt, daß einige unserer Voraussetzungen, insbesondere die Annahme, A sei artinsch, abgeschwächt werden können. Wir werden jedoch darauf verzichten, da wir einerseits eine allgemeinere Situation nicht betrachten werden und andererseits den Beweis nicht unnötig verkomplizieren wollen.

(2.9) PROPOSITION

Sei (B_0,y_0,E) ein monomial filtrierter lokaler Ring und $f:(A,m)\to(B,n)$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe mit der Faser (B_0,n_0). A sei artinsch, B (im Sinne der n-adischen Filtration) vollständig und F_B sei eine relative E-Filtration bezüglich y_0 über F_A.

Dann existiert ein kommutatives Diagramm von Homomorphismen filtrierter lokaler Ringe,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & R \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

wobei g tangential flach und h surjektiv ist, sowie F_B die Bildfiltration von F_R.

Dabei kann der von h induzierte Homomorphismus h_0: $R/mR =: R_0 \longrightarrow B_0$ als eine kanonische Surjektion $L[[Y_1,...,Y_r]]/H \to B_0$ gewählt werden. Hierbei ist $L \cong B_0/n_0$ ein Koeffizientenkörper (vgl. [Ma], §28), $\overline{Y}_i \mapsto y_{i0}$ für alle i und H ein Ideal in $L[[Y_1,...,Y_r]]$.

Die durch F_R induzierte Filtration F_{R_0} auf $R_0 = L[[Y_1,...,Y_r]]/H$ ist die durch $(\overline{Y}_1,...,\overline{Y}_r)$ definierte E-Filtration.

(Ist insbesondere E endlich erzeugt, so ist dann $gr_{F_{R_0}}(R_0)$ noethersch.)

Ist desweiteren F_B separiert, so kann man zusätzlich F_R stark separiert wählen.

B e w e i s: Da A artinsch ist, sind unter den Idealen F_A^i mit $i \in \mathbb{N}$ nur endlich viele verschiedene. Es gibt also eine endliche Folge $(x_1,...,x_t)$ von Elementen aus m derart, daß jedes Ideal F_A^i von einigen dieser erzeugt wird. Vervollständigt man diese Folge zu einem Erzeugendensystem $(x_1,...,x_s)$ von m und setzt man

$$E'_d := \{(a_1,...,a_s) \in \mathbb{N}^s\colon\ x_1^{a_1} \bullet ... \bullet x_s^{a_s} \in F_A^d\},$$

so erhält man eine koendlich filtrierende Familie E' derart, daß F_A die durch $(x_1,...,x_s)$ definierte E'-Filtration ist.

Sei nun $(y_1,...,y_r)$ die bei der Konstruktion von F_B zu benutzende Anhebung von $(y_{10},...,y_{n0})$. Dann gilt $(y_1,...,y_r)+mB = n$, also $(x'_1,...,x'_s,y_1,...,y_r) = n$, wenn man $x'_j := f(x_j)$ für $j \in \{1,...,s\}$ setzt. Ferner ist F_B die durch $(x'_1,...,x'_s,y_1,...,y_r)$ definierte E''-Filtration mit

$$(a'_1,...,a'_s,a_1,...,a_r) \in E''_d \Leftrightarrow$$
$$\exists i,j \in \mathbb{N}\colon\ (a'_1,...,a'_s) \in E'_i,\ (a_1,...,a_r) \in E_j,\ i+j \geqslant d.$$

Wir bemerken, daß mit E' und E auch E'' koendlich filtrierend ist.

Mit Hilfe der Theorie der Cohenringe (vgl. EGA IV_1, §19) sieht man, es gibt ein kommutatives Diagramm lokaler Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ \uparrow p_A & & \uparrow p_B \\ C_A[[X_1,..X_s]] & \xrightarrow{\quad q \quad} & C_B[[X_1,...,X_s,Y_1,...,Y_r]], \end{array}$$

wenn man beachtet, daß A als artinscher Ring vollständig im Sinne der m-adischen Filtration ist. Dabei seien C_A und C_B Cohenringe, $X_1,...,X_s$ und $Y_1,...,Y_r$ Unbestimmte. Für die Homomorphismen gelte $q(X_i)=X_i$, $p_A(X_i)=x_i$, $p_B(X_i)=x'_i$ und $p_B(Y_j)=y_j$, insbesondere sind p_A und p_B surjektiv. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

(i) Es sei char(A/m) (=char(B/n))= p> 0.

Dann sind C_A und C_B diskrete Bewertungsringe der Charakteristik 0, deren maximale Ideale von der Primzahl p erzeugt werden. Nun gilt $m^k=(0)$ für ein gewisses $k\in\mathbb{N}$, damit $p_A(p^k)=0$ und $p_B(p^k)=0$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm lokaler Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
C_A/(p^k)[[X_1,\dots,X_s]] \arrow[u, "p'_A"] \arrow[rr, "q"] & & C_B/(p^k)[[X_1,\dots,X_s,Y_1,\dots,Y_r]]. \arrow[u, "p'_B"']
\end{tikzcd}$$

Wir bemerken, daß $C_A/(p^k)$ und $C_B/(p^k)$ artinsche lokale Ringe mit $l(C_A/(p^k))= l(C_B/(p^k))= k$ sind.

(ii) Es sei char(A/m) (=char(B/n))= 0.

Dann sind C_A und C_B Körper der Charakteristik 0.

Wir erhalten also in beiden Fällen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
R_A[[X_1,\dots,X_s]] \arrow[u, "p'_A"] \arrow[rr, "q'"] & & R_B[[X_1,\dots,X_s,Y_1,\dots,Y_r]], \arrow[u, "p'_B"']
\end{tikzcd}$$

wobei (R_A,m_A) und (R_B,m_B) artinsche lokale Ringe mit $l(R_A)=l(R_B)$ sind, $q'(X_i)=X_i$, $p'_A(X_i)=x_i$, $p'_B(X_i)=x'_i$ und $p'_B(Y_j)=y_j$ gilt, p'_A und p'_B surjektiv sind, sowie q' die Faser $R_B/m_B[[Y_1,\dots,Y_r]]$ hat.

A und B können nun mit Faktorringen der obigen Potenzreihenringe identifiziert werden, mit $I:= \ker(p'_A)$ kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, equal] & & B \\
R_A[[X_1,\dots,X_s]]/I \arrow[rr, "g'"] & & R_B[[X_1,\dots,X_s,Y_1,\dots,Y_r]]/(q'(I)) =: R'. \arrow[u, "h'"']
\end{tikzcd}$$

Wir bemerken, dies ist ein Diagramm vom geforderten Typ und h' ist surjektiv. h' erzeugt eine Surjektion $h'_0\colon R'_0\to B_0$, damit einen Isomorphismus $L:= R_B/m_B\cong B_0/n_0$ der Restklassenkörper. (Hierbei bezeichnet R'_0 die Faser von g' (und q').) h'_0 ist also eine kanonische Surjektion $L[[Y_1,\dots,Y_r]]\to B_0$ und L tatsächlich ein Koeffizientenkörper von B_0.

Wir versehen nun $R_A[[X_1,\dots,X_s]]$ mit der durch $(X_1,\dots,X_s)$ definierten E'-Filtration, $R_B[[X_1,\dots,X_s,Y_1,\dots,Y_r]]$ mit der durch $(X_1,\dots,X_s,Y_1,\dots,Y_r)$ definierten E''-Filtration (und Faktorringe mit den entsprechenden Bildfiltrationen). Diese Filtrationen sind koendlich, da R_A und R_B artinsch sind. Auf A wird tatsächlich F_A induziert. Die Bildfiltration von $F_{R'}$ auf B ist tatsächlich F_B, insbesondere ist h' ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe.

Wenden wir uns nun dem Homomorphismus $g'\colon A\to R'$ zu. F_A^d wird erzeugt von allen Monomen $\bar{X}_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\bar{X}_s^{a_s}$ mit $(a_1,\dots,a_s)\in E'_d$. Dies bedeutet

$(a_1,\ldots,a_s,0,\ldots,0)\in E''_d$ nach obiger Konstruktion und damit $\bar{X}_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\bar{X}_s^{a_s}\in F^d_{R'}$. Folglich ist g' ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe.

Wir untersuchen jetzt die Filtration $F_{R'_0}$ auf $R'_0= L[[Y_1,\ldots,Y_r]]$. $F^d_{R_B[[X_1,\ldots,X_s,Y_1,\ldots,Y_r]]}$ wird von allen Monomen $X_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot X_s^{a_s}Y_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot Y_r^{b_r}$ mit $(a_1,\ldots,a_s)\in E'_i$, $(b_1,\ldots,b_r)\in E_j$ und $i+j\geqslant d$ erzeugt. Beim Übergang zur Faser verschwinden nur die Monome mit $a_1=\ldots=a_s=0$ nicht. Es gilt aber $(0,\ldots,0)\in E'_0\setminus E'_1$, das heißt $F^d_{R'_0}$ wird von allen Monomen $Y_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot Y_r^{b_r}$ mit $(b_1,\ldots,b_r)\in E_j$ und $j\geqslant d$ erzeugt.

$F_{R'_0}$ ist also die durch $(Y_1,\ldots,Y_r)$ definierte E-Filtration.

Für den Homomorphismus

$q':R_A[[X_1,\ldots,X_s]]\to R_B[[X_1,\ldots,X_s,Y_1,\ldots,Y_r]]$

mit der Faser $R'_0= L[[Y_1,\ldots,Y_r]]$ gilt nun nach der Definition von E''.

$$\operatorname{ord}_{F_{R_B[[X_1,\ldots,X_s,Y_1,\ldots,Y_r]]}}(X_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot X_s^{a_s}\cdot Y_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot Y_r^{b_r})$$
$$= \operatorname{ord}_{F_{R_A[[X_1,\ldots,X_s]]}}(X_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot X_s^{a_s})+\operatorname{ord}_{F_{L[[Y_1,\ldots,Y_r]]}}(Y_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot Y_r^{b_r})$$

Nach dem folgenden Lemma (2.10) ist q' tangential flach und damit nach Basiswechsel auch g'.

Ist E endlich erzeugt, so ist nach (2.8.a) $F_{R'_0}$ eine endlich erzeugte Filtration und damit nach (2.8.c) $\operatorname{gr}_{F_{R'_0}}(R'_0)$ noethersch.

Setzt man nun R:= R', so sind alle Behauptungen erfüllt, eventuell mit Ausnahme der letzten. Wir betrachten also jetzt noch die Situation, daß F_B separiert ist. Dann gilt $h'(\bigcap_{d\in\mathbb{N}}F^d_{R'})\subseteq \bigcap_{d\in\mathbb{N}}F^d_B=(0)$, wodurch wir folgendes kommutative Diagramm erhalten.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & B \\
R' \arrow[ur, "h'"] \arrow[r, "p"] & R'/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^d_{R'} \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd} =: R\ .$$

Hierbei ist F_R monomial in $(\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_s,\bar{Y}_1,\ldots,\bar{Y}_r)$ und separiert, daher stark separiert nach (1.15.b). p induziert einen Isomorphismus $\operatorname{gr}(p)$: $\operatorname{gr}(R')\to\operatorname{gr}(R)$, so daß mit g' auch $g:= p\circ g'$ tangential flach ist.

Alle weiteren geforderten Eigenschaften übertragen sich unmittelbar aus der ursprünglichen Situation. (Wegen der obigen Faktorisierung ist jedoch hier $H \neq (0) \subseteq L[[Y_1,\dots,Y_r]]$ denkbar.)

Q.E.D.

Die folgende Aussage über die tangentiale Flachheit konkreter Homomorphismen ist sehr einfach. Wir formulieren sie nur deshalb als Lemma, weil wir sie zweimal benötigen, nämlich für Proposition (2.9) und Satz (2.20).

(2.10) LEMMA

Seien (R_A,m_A) und (R_B,m_B) artinsche lokale Ringe mit $l(R_A)=l(R_B)$ sowie $f\colon A:=R_A[[X_1,\dots,X_s]] \to B:=R_B[[X_1,\dots,X_s,Y_1,\dots,Y_r]]$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe mit der Faser $B_0:=R_B/m_B[[Y_1,\dots,Y_r]]$. F_A sei monomial in $(X_1,\dots,X_s)$, F_B monomial in $(X_1,\dots,X_s,Y_1,\dots,Y_r)$ (und damit F_{B_0} monomial in $(Y_1,\dots,Y_r)$), wobei

$$\operatorname{ord}_{F_B}(X_1^{a_1}\bullet\dots\bullet X_s^{a_s}\bullet Y_1^{b_1}\bullet\dots\bullet Y_r^{b_r})$$
$$= \operatorname{ord}_{F_A}(X_1^{a_1}\bullet\dots\bullet X_s^{a_s})+\operatorname{ord}_{F_{B_0}}(Y_1^{b_1}\bullet\dots\bullet Y_r^{b_r})$$

gelte. Dann ist $f\colon A\to B$ tangential flach.

B e w e i s: Sei $l(R_A)=l(R_B)=:l$ bezeichnet. Dann ergibt sich für die Hilbertfunktionen, (wenn wir eine Multiindexschreibweise benutzen)

$$H^0_B(d) = l\bullet \#\{(a,b)\in\mathbb{N}^s\times\mathbb{N}^r\colon \operatorname{ord}_{F_B}(X^a\bullet Y^b)=d\}$$
$$= l\bullet \#\{(a,b)\in\mathbb{N}^s\times\mathbb{N}^r\colon \operatorname{ord}_{F_A}(X^a)+\operatorname{ord}_{F_{B_0}}(Y^b)=d\}$$
$$= l\bullet \sum_{i=0}^{d}(\#\{a\in\mathbb{N}^s\colon \operatorname{ord}_{F_A}(X^a)=i\}\bullet \#\{b\in\mathbb{N}^r\colon \operatorname{ord}_{F_{B_0}}(Y^b)=d-i\})$$
$$= \sum_{i=0}^{d} H^0_A(i)\bullet H^0_{B_0}(d-i)\ .$$

Für die assoziierten Potenzreihen gilt somit $H^0_B=H^0_A\bullet H^0_{B_0}$. Multiplikation mit $\frac{1}{1-T}$ liefert $H^1_B=H^1_A\bullet H^0_{B_0}$, so daß f nach Satz (1.8.ii) tangential flach ist.

Q.E.D.

(2.11) DEFINITIONEN

Sei (A,F_A) ein filtrierter lokaler Ring und M ein A-Modul. Unter einer *Filtration* F_M auf M verstehen wir hier eine Folge $(F^d_M)_{d\in\mathbb{Z}}$

von Teilmoduln von M mit

(a) $F_M^d \supseteq F_M^{d+1}$ für alle $d\in\mathbb{Z}$,

(b) $F_A^{d_1}\cdot F_M^{d_2} \subseteq F_M^{d_1+d_2}$ für beliebige $d_1\in\mathbb{N}$, $d_2\in\mathbb{Z}$.

Ein *filtrierter A-Modul* ist ein Paar (M,F_M), das aus einem A-Modul M und einer Filtration F_M auf M besteht.

Sei M ein filtrierter A-Modul. Dann wird die direkte Summe

$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} F_M^d/F_M^{d+1}$

mit der Multiplikation mit Elementen aus $gr_{F_A}(A)$

$(a \bmod F_A^{d+1})\cdot(m \bmod F_M^{d'+1}) := (am \bmod F_M^{d+d'+1})$

für $a\in F_A^d$, $m\in F_M^{d'}$ versehen, zu M *assoziierter graduierter* gr(A)*-Modul* genannt und mit $gr_{F_M}(M)$ oder gr(M) bezeichnet.

Es sei hervorgehoben, daß wir hier, im Gegensatz zur Situation filtrierter lokaler Ringe, die Indexmenge $\mathbb{Z}$ zulassen.

Wir wollen ein Kriterium beweisen, das die Eigenschaft eines monomial filtrierten lokalen Rings, nur tangential flache Deformatuonen zu besitzen, mit Hilfe gewisser Normalenmoduln ausdrückt. Wir beschäftigen uns daher nun mit einigen Konstruktionen, die mit Normalenmoduln zusammenhängen.

(2.12) DEFINITIONEN

Sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Dann heißt der R/I-Modul

$N_I := Hom_R(I,R/I)$ $(\cong Hom_{R/I}(I/I^2,R/I))$

Normalenmodul von I.

Ist R ein filtrierter lokaler Ring, so fassen wir N_I stets als filtrierten Modul auf bezüglich der induzierten Filtration

$F_{N_I} := (F_{N_I}^d)_{d\in\mathbb{Z}}$ mit

$F_{N_I}^d := \{f\in N_I\colon f(I\cap F_R^k)\subseteq F_R^{k+d}+I/I$ für alle $k\in\mathbb{N}\}$.

(Insbesondere ist es sinnvoll, den assoziierten graduierten Modul $gr(N_I) := gr_{F_{N_I}}(N_I)$ zu betrachten.)

Ist $R=\bigoplus_{d=0}^{\infty}R(d)$ ein graduierter Ring und $I=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}^{\infty}I(d)$ ein endlich erzeugtes homogenes Ideal, so ist N_I in natürlicher Weise ein graduierter Modul, $N_I = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}N_I(d)$ mit

$N_I(d) = \{f\in N_I\colon f(I(k))\subseteq R(k+d)/I(k+d)\}$.

Sei (B_0,y_0,E) ein monomial filtrierter lokaler Ring, wobei (B_0,n_0) einen Körper enthält und n_0-adisch vollständig ist.

Wir wählen einen Koeffizientenkörper $B_0/n_0 =: L \hookrightarrow B_0$. Sei dann $p\colon L[[Y_1,\dots,Y_r]] =: R_0 \twoheadrightarrow B_0$ die kanonische Surjektion mit $Y_i \mapsto y_{i0}$ und I_0 deren Kern. R_0 wird mit der durch $(Y_1,\dots,Y_r)$ definierten E-Filtration versehen.

Unter dem *Normalenmodul* N_{B_0} von B_0 verstehen wir den filtrierten Modul

$$N_{B_0} := N_{I_0} = \mathrm{Hom}_{R_0}(I_0, B_0).$$

Analog heißt der graduierte Modul

$$N_{gr(B_0)} := N_{gr(I_0,R_0)} = \mathrm{Hom}_{gr(R_0)}(gr(I_0,R_0), gr(B_0))$$

Normalenmodul des assoziierten graduierten Rings von B_0.

(2.13) BEMERKUNGEN

a) B_0 besitzt einen Koeffizientenkörper $L \hookrightarrow B_0$ nach [Ma], Theorem 28.3.

b) Die Normalenmoduln N_{B_0} und $N_{gr(B_0)}$ sind bestimmt bis auf (nicht kanonische) Isomorphie, die die Filtrationen bzw. Graduierungen respektiert.

B e w e i s: Seien $L_1 \hookrightarrow B_0$ und $L_2 \hookrightarrow B_0$ zwei Koeffizientenkörper. Standardüberlegungen zu Koeffizientenkörpern (und Diagrammen) liefern ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_{10} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "q'"] & R_{10} = L_1[[Y_1,\dots,Y_r]] \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "q"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{20} \arrow[r, "i_2"] & R_{20} = L_2[[Y_1,\dots,Y_r]] \arrow[r, "p_2"] & B_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dabei gilt $p_1(Y_i) = y_{i0}$, $p_2(Y_i) = y_{i0}$ und $q(Y_i) = Y_i$, insbesondere ist q surjektiv. Wegen $\dim(L_1[[Y_1,\dots,Y_r]]) = \dim(L_2[[Y_1,\dots,Y_r]]) = r$ muß q sogar bijektiv sein, damit q' ebenso.

Desweiteren ergibt sich $q(F^d_{R_{10}}) = q(F^d_{R_{20}})$, also $q'(I_{10} \cap F^d_{R_{10}}) = I_{20} \cap F^d_{R_{20}}$, so daß wir einen Isomorphismus

$$q^*\colon N_{I_{20}} = \mathrm{Hom}_{R_{20}}(I_{20}, B_0) \to N_{I_{10}} = \mathrm{Hom}_{R_{10}}(I_{10}, B_0)$$

filtrierter B_0-Moduln erhalten.

Weiterhin ergibt sich ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & gr(I_{10}, R_{10}) \arrow[r, "gr(i_1)"] \arrow[d, "gr(q')"] & gr(R_{10}) \arrow[r, "gr(p_1)"] \arrow[d, "gr(q)"] & gr(B_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & gr(I_{20}, R_{20}) \arrow[r, "gr(i_2)"] & gr(R_{20}) \arrow[r, "gr(p_2)"] & gr(B_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

wobei $gr(q')$ und $gr(q)$ graduierte Isomorphismen sind.

Wir erhalten einen Isomorphismus

$$gr(q)^*:\quad N_{gr(I_{20},R_{20})} = Hom_{gr(R_{20})}(gr(I_{20},R_{20}),gr(B_0))$$
$$\longrightarrow N_{gr(I_{10},R_{10})} = Hom_{gr(R_{10})}(gr(I_{10},R_{10}),gr(B_0))$$

graduierter $gr(B_0)$-Moduln.

Q.E.D.

c) Ist $N=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} N(d)$ ein graduierter Modul über dem graduierten Ring $R=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R(d)$, so schreiben wir im Folgenden

$N(<k) := N/\bigoplus_{d=k}^{\infty} N(d)$

für $k\in\mathbb{Z}$. Dieser R-Modul ist über R(0) zu $\bigoplus_{d<k} N(d)$ isomorph.

d) Die beiden folgenden Propositionen (2.14) und (2.17) geben notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für die tangentiale Flachheit aller kleinen Fortsetzungen einer gegebenen Deformation an. Sie sind die wichtigsten Schritte auf dem Weg zu dem angestrebten Kriterium.

Sei R ein Ring. Um unnötig viele Indizes zu vermeiden, werden wir rR für das von den Koordinaten von $r=(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda} R$ erzeugte Ideal schreiben. Hierbei ist Λ eine beliebige Indexmenge.

Ist ferner $h=(h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R\subseteq\prod_{\lambda\in\Lambda} R$, so schreiben wir auch für die kanonische Verallgemeinerung des Skalarprodukts $\langle h,r\rangle := \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda r_\lambda$.

Für die Beweise werden mehrere Lemmata benötigt, die wir jeweils im Anschluß formulieren.

(2.14) PROPOSITION

Sei $f:(A,m)\to(R,M)$ ein tangential flacher Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe, wobei F_R stark separiert ist, und I ein Ideal in R, für das der Ring $B:=R/I$ flach ist über A. Weiter sei $t\in A\setminus\{0\}$ ein Sockelelement (das heißt $tm=(0)$).

Wir betrachten die folgenden Aussagen.

(ii) Für jedes Ideal I' in R mit $I+tR=I'+tR$ impliziert die Flachheit von $B':=R/I'$ über A bereits die tangentiale Flachheit.

(iii) Es gilt $gr(N_{I_0})(<-ord_{F_A}(t))=0$.

Hierbei sei $R_0:=R/mR$ und $I_0:=IR_0$ gesetzt.

Dann gilt (ii)$\Rightarrow$(iii).

B e w e i s: Sei g ein Element des Normalenmoduls $N_{I_0}=Hom_{R_0}(I_0,R_0/I_0)$. Wir wählen eine Standardbasis $r_0=(r_{0\lambda})_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda} R_0$ von I_0. (Λ ist eine beliebige Indexmenge.)

$s_0=(s_{0\lambda})_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda} R_0$ sei so gewählt, daß $g(r_{0\lambda})=s_{0\lambda} \bmod I_0$ für alle $\lambda\in\Lambda$ gilt. Nach dem folgenden Lemma (2.15) ist r_0 ein

Erzeugendensystem von I_0, also $r_0R_0= I_0$ und g wird durch die Eigenschaft

$$g(\langle h_0,r_0\rangle)= \langle h_0,s_0\rangle \bmod I_0 \quad \text{für alle } h_0= (h_{0\lambda})_{\lambda\in\Lambda}\in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_0$$

bereits bestimmt.

Aufgrund von Voraussetzung (ii) ist B=R/I tangential flach über A. Damit existiert eine Anhebung $r= (r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in \prod_{\lambda\in\Lambda} R$ von r_0 zu einer Standardbasis von I mit $\mathrm{ord}_{F_R}(r_\lambda)= \mathrm{ord}_{F_{R_0}}(r_{\lambda 0})$ für alle $\lambda\in\Lambda$.
Wir setzen $r':= r+ts_0\in \prod_{\lambda\in\Lambda} R$ (man beachte, ts_0 ist wohldefiniert, da t m annulliert) und $I':= r'R$. Nach Lemma (2.16) ist $B':= R/I'$ flach und damit nach (ii) tangential flach über A.
Im Ring $B':= R/I'$ bestehen nun die Identitäten

$$t\bullet(s_{0\lambda} \bmod I_0)= -(r_\lambda \bmod I') \quad \text{für alle } \lambda\in\Lambda.$$

Satz (1.21) liefert, wenn man zur Vereinfachung $e:= \mathrm{ord}_{F_A}(t)$ setzt,

$$\begin{aligned} e+ \mathrm{ord}_{F_{R_0/I_0}}(s_{0\lambda} \bmod I_0) &= \mathrm{ord}_{F_{R/I'}}(r_\lambda \bmod I') \\ &\geqslant \mathrm{ord}_{F_R}(r_\lambda) \\ &= \mathrm{ord}_{F_{R_0}}(r_{\lambda 0}) . \end{aligned}$$

Sei nun $x_0\in I_0\cap F^k_{R_0}$. Nach dem folgenden Lemma (2.15) gibt es eine Darstellung $x_0= \langle h_0,r_0\rangle$ mit $h_0= (h_{0\lambda})_{\lambda\in\Lambda}\in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_0$ und

$$\mathrm{ord}_{F_{R_0}}(h_{0\lambda})+\mathrm{ord}_{F_{R_0}}(r_{0\lambda})\geqslant k$$

für alle $\lambda\in\Lambda$. Dies liefert $g(x_0)= g(\langle h_0,r_0\rangle)= \langle h_0,s_0\rangle \bmod I_0$ mit

$$\mathrm{ord}_{F_{R_0}}(h_{0\lambda})+ \mathrm{ord}_{F_{R_0/I_0}}(s_{0\lambda} \bmod I_0)\geqslant k-e$$

für alle λ, woraus $g(x_0)\in F^{k-e}_{R_0}+I_0/I_0$ folgt.

Wir haben $F^{-e}_{N_{I_0}} =N_{I_0}$ erhalten. Dies ergibt unmittelbar $gr(N_{I_0})(<-e)=0$.

Q.E.D.

(2.15) LEMMA

Sei (R,M) ein filtrierter lokaler Ring, wobei F_R stark separiert ist. Ferner sei I ein Ideal in R und $r= (r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in \prod_{\lambda\in\Lambda} R$ eine Standardbasis von I.

Dann gibt es für jedes $x\in I\cap F^k_R$ eine Darstellung $x= \langle h,r\rangle$ mit $h= (h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ und $\mathrm{ord}_{F_R}(h_\lambda)+\mathrm{ord}_{F_R}(r_\lambda)\geqslant k$ für alle $\lambda\in\Lambda$.

Insbesondere ist r ein Erzeugendensystem von I.

B e w e i s: Wir bezeichnen mit $I^{(k)}\subseteq I\cap F^k_R$ das Ideal aus allen denjenigen Elementen, die in der angegebenen Weise darstellbar sind.

Sei also $x \in I \cap F_R^k$. Dann ist $in(x) \in gr(I,R) \subseteq gr(R)$ ein homogenes Element mit $deg(in(x)) \geq k$. Da nun $in(r)= (in(r_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ein Erzeugendensystem von $gr(I,R)$ ist, gibt es eine Darstellung

$in(x)= \sum_{\lambda\in\Lambda} in(h_\lambda)\bullet in(r_\lambda)$, wobei für alle $\lambda\in\Lambda$ $h_\lambda \in R$ und

$deg(in(h_\lambda))+ deg(in(r_\lambda)) \geq k$, also $ord_{F_R}(h_\lambda)+ ord_{F_R}(r_\lambda) \geq k$ gilt, sowie nur endlich viele h_λ von 0 verschieden sind. Dies liefert $x \equiv \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda r_\lambda \mod F_R^{k+1}$, also $x \in I^{(k)}+F_R^{k+1}$ und, wegen $x\in I$ und $I^{(k)} \subseteq I$, $x\in I^{(k)}+ I\cap F_R^{k+1}$.

Wir haben $I\cap F_R^k \subseteq I^{(k)}+ I\cap F_R^l$ für $l= k+1$ erhalten. Iterativ gewinnt man diese Inklusion für beliebig großes $l\in\mathbb{N}$. Daraus ergibt sich für beliebig große $p,q\in\mathbb{N}$ $I\cap F_R^k \subseteq I^{(k)}+(I\cap F_R^k)\cap M^p$ und $I\cap F_R^k \subseteq I^{(k)}+M^q(I\cap F_R^k)$, wenn man die starke Separiertheit und das Lemma vom Artin-Rees benutzt. Beachtet man nun, daß die letzte Inklusion für $q\geq 1$ trivialerweise eine Gleichheit ist, so liefert Nakayamas Lemma $I\cap F_R^k= I^{(k)}$.

Q.E.D.

Das folgende Lemma ist eine bekannte Beschreibung der Deformationen erster Ordnung mit Hilfe des Normalenmoduls (vgl. [Ar], Theorem 6.1), die wir in einer für uns bequemen Formulierung geben.

(2.16) LEMMA

Sei $f:(A,m)\rightarrow(R,M)$ ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Ringe mit der Faser $R_0:= R/mR$. Weiter seien ein Element $t\in A\setminus\{0\}$ mit $tm= (0)$ und Systeme $r,s\in \prod_{\lambda\in\Lambda} R$ gegeben. (Λ sei eine beliebige Indexmenge.)

Wir nehmen an, $B:= R/rR$ ist flach über A. (rR bezeichne das von den Koordinaten von R erzeugte Ideal.)

Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) $B_s:= R/(r+ts)R$ ist flach über A.

(ii) $s_0= (s_{0\lambda})_{\lambda\in\Lambda}:= (s_\lambda \mod mR)_{\lambda\in\Lambda}$ definiert ein Element $\langle h_0,r_0\rangle \mapsto (\langle h_0,s_0\rangle \mod I_0)$ des Normalenmoduls $N_{I_0} = Hom_R(I_0,R_0/I_0)$ von $I_0:= r_0R_0$. (Dabei sei $r_0= (r_{0\lambda})_{\lambda\in\Lambda}:= (r_\lambda \mod mR)_{\lambda\in\Lambda}$ gesetzt.)

B e w e i s: Wir bemerken zunächst, s_0 definiert genau dann ein Element von N_{I_0}, wenn für alle $h_0 \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_0$ mit $\langle h_0,r_0\rangle=0$ $\langle h_0,s_0\rangle \in r_0R_0$ gilt.

Sei $r':= r+ts$. Nach dem lokalen Kriterium der Flachheit ist B_s genau dann flach über A, wenn $Tor_1^A(B_s,A/tA)=0$ gilt. (Man beachte, $B_s/tB_s \cong B/tB$ ist flach über A/tA.) Durch Tensorieren der kurzen

exakten Sequenz $0\to r'R\to R\to B_s\to 0$ mit A/tA über A kann man diesen Tor-Modul berechnen, wenn man beachtet, daß R A-flach ist.
Es ergibt sich, daß die Flachheit von B_s über A äquivalent ist zu
$tR\cap r'R= tr'R$.

(i)⇒(ii) Tensorieren der kurzen exakten Sequenz $0\to rR\to R\to R/rR=B\to 0$ mit A/m über A liefert, wenn man beachtet, daß B A-flach ist, die Exaktheit von $0\to rR/mrR\to R/mR$, das heißt $rR\cap mR= mrR$.

Sei nun h_0 ein Element aus $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_0$ mit $\langle h_0,r_0\rangle= 0$. $h'\in\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ sei eine Anhebung von h_0. Dann gilt $\langle h',r\rangle\in rR\cap mR= mrR$. Es gibt also ein $h''\in\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} mR$ mit $\langle h'',r\rangle= \langle h',r\rangle$ und damit $\langle h,r\rangle= 0$, wenn man $h:= h'-h''$ setzt. $h\in\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ ist offenbar ebenfalls eine Anhebung von h_0.

Damit gilt $\langle h,s\rangle t= \langle h,r+ts\rangle$. Dieses Element liegt in tR und $r'R$, also in $tr'R= trR$. Es gibt also ein $g\in\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ mit $\langle h,s\rangle t= \langle g,r\rangle t$, das heißt

$\langle h,s\rangle-\langle g,r\rangle\in 0_R:t$.

Weil R A-flach ist, gilt $0_R:t= (0_A:t)R= mR$.
Es folgt $\langle h,s\rangle\in \langle g,r\rangle+mR\subseteq rR+mR$ und $\langle h_0,s_0\rangle\in r_0R_0$.

(ii)⇒(i) Es ist

$tR\cap r'R\subseteq tr'R$

zu beweisen. Sei also $\langle h,r'\rangle\in tR(\cap r'R)$ mit $h\in\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$. Zunächst gilt $\langle h,r\rangle= \langle h,r'\rangle-t\langle h,s\rangle\in tR$, also, da R/rR A-flach ist, $\langle h,r\rangle\in tR\cap rR= trR$. Es reicht also $t\langle h,s\rangle\in trR(= tr'R)$ zu zeigen.
Wir setzen $h_0= (h_{0\lambda})_{\lambda\in\Lambda}:= (h_\lambda \bmod mR)_{\lambda\in\Lambda}\in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_0$. Wegen $\langle h,r'\rangle\in tR$ gilt dann $\langle h_0,r_0\rangle= 0$ und nach (ii) $\langle h_0,s_0\rangle\in r_0R_0$. Dies bedeutet $\langle h,s\rangle\in rR+mR$ und $t\langle h,s\rangle\in trR$.

Q.E.D.

(2.17) PROPOSITION

Sei $f:(A,m)\to(R,M)$ ein tangential flacher Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe, wobei F_A und F_R stark separiert sind und $gr_{F_{R_0}}(R_0)$ ein noetherscher Ring ist, sowie I ein Ideal in R, für das der Ring $B:= R/I$ flach ist über A.
Weiter sei $t\in A\setminus\{0\}$ ein Sockelelement (das heißt $tm= (0)$) mit der Eigenschaft, daß $\bar{B}:= B/tB$ tangential flach ist über $\bar{A}:= A/tA$.
Es sei $R_0:= R/mR$ und $I_0:= IR_0$ gesetzt.
Wir betrachten folgende Aussagen.

(i) Es gilt $N_{gr(I_0,R_0)}(\langle-ord_{F_A}(t))=0$.

(ii) Für jedes Ideal I' in R mit $I+tR= I'+tR$ impliziert die

Flachheit von $B' := R/I'$ über A bereits die tangentiale Flachheit.

Dann gilt (i)⇒(ii).

B e w e i s: Wir nehmen an, der Ring B' in Aussage (ii) ist flach und zeigen seine tangentiale Flachheit über A. Dazu genügt es nachzuweisen, das Ideal I' in R genügt der Bedingung (iii) von Satz (1.24). Wir setzen

$$\bar{R} := R/tR, \quad \bar{I} := I\bar{R} = I\,\bar{R}.$$

$gr(I_0,R_0)$ ist endlich erzeugt, da $gr(R_0)$ noethersch ist. Sei also $r_0 \in R_0^n$ eine endliche Standardbasis von I_0. Nun ist $\bar{R}$ tangential flach über $\bar{A}$ nach Basiswechsel, $\bar{B}$ tangential flach über $\bar{A}$ laut Voraussetzung und $\bar{B} = (R/I)/t(R/I) = (R/tR)/I(R/tR) = \bar{R}/\bar{I}$. Folglich existiert eine Anhebung $\bar{r}$ von r_0 zu einer Standardbasis von $\bar{I}$ mit $ord(\bar{r}_i) = ord(r_{0i})$ für alle $i \in \{1,...,n\}$. Die Koordinaten von r_0 erzeugen das Ideal I_0 nach Lemma (2.15). R ist A-flach wegen der tangentialen Flachheit, $B' = R/I'$ nach Voraussetzung. Nach dem folgenden Lemma (2.18) liefert eine beliebige Anhebung von r_0 zu einem n-Tupel von Elementen aus I' ein Erzeugendensystem von I'. Wir wählen die Anhebung r' spezieller, so daß sie sogar eine Anhebung von $\bar{r}$ ist. Man kann r' in der Gestalt

$$r' = r + ts_0, \quad s_0 \in R_0^n$$

mit

$$ord(r_i) = ord(\bar{r}_i) = ord(r_{0i}) \quad \text{für alle } i$$

schreiben. Man beachte hierbei, daß ts_0 ein wohldefiniertes Element von R^n ist, da t das Ideal mR annulliert.

Sei $e := ord_{F_A}(t)$. Angenommen, wir können die Anhebung r' und die Zerlegung $r' = r + ts_0$ noch so wählen, daß für alle i

$$ord(s_{0i}) \geqslant ord(r_{0i}) - e \tag{1}$$

gilt. Aus (1) folgt offenbar $ord(r'_i) = ord(r_{0i})$ für alle i, das heißt die Standardbasis r_0 von I_0 kann, wie es in Satz (1.24.iii) gefordert wird, angehoben werden zu einer Folge r' von Elementen aus I' mit $ord(r'_i) = ord(r_{0i})$ für alle i. Der Ring B' ist somit tangential flach über A.

Wir nehmen jetzt an, (1) gilt nicht und wählen eine möglichst kleine ganze Zahl m mit

$$ord(s_{0i}) \geqslant ord(r_{0i}) - m$$

für alle $i \in \{1,...,n\}$. Dann gilt $m > e$. Zum Beweis der Implikation (i)⇒(ii) reicht es aus, wenn wir in dieser Situation zeigen, die Zerlegung $r' = r + ts_0$ kann durch eine andere Zerlegung dieser Art mit kleinerem m ersetzt werden.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen.

$d(i) := \operatorname{ord}(r_{0i})$ für alle i

$S_0 := s_0 + (F_{R_0}^{d(1)-m+1}, \ldots, F_{R_0}^{d(n)-m+1}) \in gr(R_0)^n$

$in(r_0) := (in(r_{0i}))_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in gr(I_0,R_0)^n$

Wir werden zeigen, das n-Tupel S_0 von Elementen aus $gr(R_0)$ definiert ein Element

$$\langle H_0, in(r_0)\rangle \mapsto \langle H_0, S_0\rangle \bmod gr(I_0,R_0) \qquad (2)$$

des Normalenmoduls

$N_{gr(I_0,R_0)} = Hom_{gr(R_0)}(gr(I_o,R_0), gr(R_0)/gr(I_0,R_0))$.

Man beachte, da r_0 eine Standardbasis von I_0 ist, kann man jedes Element von $gr(I_0,R_0)$ in der Gestalt $\langle H_0, in(r_0)\rangle$ schreiben mit einem n-Tupel H_0 von Elementen aus $gr(R_0)$.

Das Element (2) ist, falls es existiert, homogen, denn es gilt

$\deg(S_{0i}) - \deg(in(r_{0i})) = -m$

für alle i. Nach Voraussetzung (i) muß es also Null sein, das heißt die Koordinaten von S_0 müssen in $gr(I_0,R_0)$ liegen. Da r_0 eine Standardbasis von I_0 ist, existiert eine Matrix A mit Elementen aus R_0 derart, daß für

$s'_0 := s_0 - \langle A, r_0\rangle$

gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(s'_{0i}) &\geqslant d(i)-m+1 \\ &= \operatorname{ord}(r_{0i})-(m-1) \quad \text{für alle i.} \end{aligned}$$

Aus des Zerlegung $r' = r + ts_0$ erhalten wir $r' = r + t\langle A, r_0\rangle + ts'_0$, also

$r'' := \langle E - tA, r'\rangle = r + ts'_0$.

Offenbar gilt $(r'' \bmod tR^n) = (\langle E, r'\rangle \bmod tR^n) = (r' \bmod tR^n)$. r'' ist also eine weitere Anhebung von $\overline{r}$. Für alle i gilt $r''_i \in r'R = I'$, so daß r'' eine Anhebung von $\overline{r}$ zu einem Erzeugendensystem von I' ist.

Die zur Zerlegung $r'' = r + ts'_0$ gehörige ganze Zahl m ist um mindestens 1 kleiner als bei der gegebenen Zerlegung von r'.

Der Beweis der tangentialen Flachheit von B' über A ist damit zurückgeführt auf die Existenz des Homomorphismus (2). Wir haben zu zeigen, für jedes n-Tupel H_0 von Elementen aus $gr(R_0)$ mit $\langle H_0, in(r_0)\rangle = 0$ gilt $\langle H_0, S_0\rangle \in gr(I_0,R_0)$. Sei H_0 ein derartiges n-Tupel. Wir können annehmen, die Relation $\langle H_0, in(r_0)\rangle = 0$ ist homogen, das heißt es gilt

$$\deg(H_{0i}) + \deg(in(r_{0i})) = d \quad \text{für alle i} \qquad (3)$$

mit einer nichtnegativen ganzen Zahl d.

Nun ist $(\overline{R},\overline{M})$ tangential flach über $(\overline{A},\overline{m})$. Daher gilt $gr(R_0)= gr(\overline{R}/\overline{mR})= gr(\overline{R})/gr(\overline{m},\overline{A})gr(\overline{R})$. Die Relation $<H_0, in(r_0)>= 0$ in $gr(R_0)$ kann man also auffassen als eine Relation modulo $gr(\overline{m},\overline{A})gr(\overline{R})$ von $in(\overline{r})= (in(\overline{r_i}))_{i\in\{1,...,n\}}\in gr(\overline{I},\overline{R})^n$. Weiterhin gilt $gr(\overline{B})= gr(\overline{R})/gr(\overline{I},\overline{R})= gr(\overline{R})/in(\overline{r})gr(\overline{R})$. Da dieser Ring flach ist über $gr(\overline{A})$, sind wir in der Situation von Lemma (2.19). Die obige Relation kann also angehoben werden zu einer Relation von $in(\overline{r})$.

Es gibt ein n-Tupel $H\in gr(R)^n$ von homogenen Elementen mit

$<H, in(r)>\equiv 0 \bmod gr(tR,R)$ und $H_0= (H \bmod gr(m,A)gr(R)^n)$,

wobei $in(r):= (in(r_i))_{i\in\{1,...,n\}}\in gr(R)^n$ bedeute. Wir wählen ein n-Tupel $h\in R^n$ mit $in(h)= (in(h_i))_{i\in\{1,...,n\}}= H$. Dann gilt $<h,r>\in F_R^{d+1}+tR$, und wegen $ord(r_i)= ord(r_{0i})$ und (3) ist für alle i

$ord(h_i)+ord(r_i)\geqslant d.$ (4)

Nun ist $\overline{r}$ eine Standardbasis von $\overline{I}$. Es gibt deshalb nach Lemma (2.15) ein n-Tupel $h'\in R^n$ mit $<h,r>\equiv <h',r> \bmod tR$ und

$ord(h'_i)+ord(r_i)\geqslant d+1$ (5)

für alle i. Man beachte, es ist $ord(\overline{r_i})= ord(r_i)$.

Wir wählen ein Element $x_0\in R_0$ mit $<h-h',r>= tx_0$. Wegen $ord_{F_R}(tx_0)= ord_{F_R}(<h-h',r>)\geqslant d$ und der tangentialen Flachheit von R über A gilt nach Satz (1.21)

$ord_{F_{R_0}}(x_0)\geqslant d-e> d-m.$ (6)

In der Kongruenz modulo tR von (5) kann man r durch r' ersetzen, das heißt es gilt

$<h-h',r'>\equiv 0 \bmod tR.$

Nun ist $B'= R/r'R$ flach über A, so daß wir in der Situation von Lemma (2.19) sind. Die obige Relation kommt von einer Relation von r' in R, das heißt es gibt ein n-Tupel $y_0\in R_0^n$ mit

$<h-h'+ty_0, r'>= 0.$

Das bedeutet, wenn wir den Übergang zu den Restklassen modulo mR durch einen Index "0" kennzeichnen,

$$\begin{aligned} 0&= <h-h',r'>+t<y_0,r_0> \\ &= <h-h',r>+<h-h',ts_0>+t<y_0,r_0> \\ &= t(x_0+<h_0-h'_0,s_0>+<y_0,r_0>). \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit t in A hat den Kern m, das heißt $A/m\xrightarrow{t}A$ ist injektiv. Da R A-flach ist, ist auch $R/mR\xrightarrow{t}R$ injektiv.

Es gilt also sogar $x_0+<h_0-h'_0,s_0>+<y_0,r_0>= 0$ und damit

$<h_0,s_0>-<h'_0,s_0>+x_0\in r_0R_0= I_0.$

Durch Übergang zu einer geeigneten Anfangsform wird sich daraus die zu beweisende Relation $\langle H_0, S_0\rangle \in gr(I_0, R_0)$ ergeben. Um das zu sehen, schätzen wir zunächst die Ordnungen der einzelnen Glieder in dem obigen Ausdruck ab. Es gilt für alle i

$$
\begin{aligned}
ord(h_{0i})+ord(s_{0i}) &\geqslant ord(h_{0i})+ord(r_{0i})-m \\
&\geqslant ord(h_i)+ord(r_i)-m \\
&\geqslant d-m \qquad\qquad \text{(nach (4))}, \\
ord(h'_{0i})+ord(s_{0i}) &\geqslant ord(h'_{0i})+ord(r_{0i})-m \\
&\geqslant ord(h'_i)+ord(r_i)-m \\
&\geqslant d+1-m \qquad\qquad \text{(nach (5))}.
\end{aligned}
$$

Die Ordnung von $\langle h_0, s_0\rangle$ ist demnach mindestens d-m und die der beiden anderen Glieder sogar noch größer (wegen der Ordnung von x_0 siehe (6)). Es folgt

$$\langle h_0, s_0\rangle + F^{d-m+1}_{R_0} \in gr(I_0, R_0).$$

Dies ist aber gerade die zu beweisende Relation $\langle H_0, S_0\rangle \in gr(I_0, R_0)$, denn

$$
\begin{aligned}
H_0 &= h_0+(F^{d-d(1)+1}_{R_0}, \ldots, F^{d-d(n)+1}_{R_0}) \qquad \text{(vgl. (3))} \\
S_0 &= s_0+(F^{d(1)-m+1}_{R_0}, \ldots, F^{d(n)-m+1}_{R_0}).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(2.18) LEMMA

Sei $f:(A,m)\to(B,n)$ ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Ringe. I sei ein Ideal in B derart, daß B/I ebenfalls A-flach ist.

Dann liefert eine beliebige Anhebung eines Erzeugendensystems des Ideals $I_0 := IB_0$ in $B_0 := B/mB$ zu einer Menge von Elementen aus I ein Erzeugendensystem von I.

B e w e i s: Da B/I A-flach ist, ist $(m \hookrightarrow A)\otimes_A B/I$ injektiv. Die linke Seite liefert $m\otimes_A B/I = m\otimes_A B\otimes_B B/I = mB\otimes_B B/I = mB/mI$, die rechte B/I. Daher bedeutet die Injektivität $I\cap mB = mI$. Nun gilt $I_0 = I+mB/mB = I/I\cap mB = I/mI$. Die Anhebung des Erzeugendensystems erzeugt also ein Teilideal $J\subseteq I$ mit $J+mI = I$. Nakayamas Lemma liefert $I = J$.

Q.E.D.

(2.19) LEMMA

Sei $f:A\to R$ ein Ringhomomorphismus und J ein Ideal in R derart, daß R/J A-flach ist. $r\in R^n$ sei ein Erzeugendensystem von J. Ferner seien I ein Ideal in A und $a\in R^n$ ein Vektor mit $\langle a,r\rangle \in IR$.

Dann gibt es einen Vektor $a' \in R^n$ mit $a_i' \equiv a_i$ mod IR für alle $i \in \{1,...,n\}$ und $<a',r>= 0$.

B e w e i s: Die exakte Sequenz $0 \to J \to R \to R/J \to 0$ liefert beim Tensorieren mit A/I über A, daß $0 \to J/IJ \to R/IR$ exakt ist. Folglich gilt $IR \cap J = IJ$. Wir haben also sogar $<a,r> \in IJ$ erhalten, das heißt es gibt eine Darstellung $<a,r>= <\bar{a},r>$ mit $\bar{a} \in (IR)^n$. Man kann $a' := a - \bar{a}$ setzen.

Q.E.D.

Wir kommen nun zur angekündigten Charakterisierung der monomial filtrierten lokalen Ringe, die nur tangential flache Deformationen besitzen. Diese betrachten wir als das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit.

(2.20) SATZ

Sei (B_0, y_0, E) ein monomial filtrierter lokaler Ring, der einen Körper enthält. Wir betrachten folgende Aussagen.

(i) Es gilt $N_{gr(\hat{B}_0)}(<-1)= 0$.

(ii) (B_0, y_0, E) hat nur tangential flache Deformationen.

(iii) Es gilt $gr(N_{\hat{B}_0})(<-1)= 0$.

Ist dann E separiert filtrierend, so gilt (ii)$\Rightarrow$(iii).

Ist E sogar endlich erzeugt, so gilt (i)$\Rightarrow$(ii).

B e w e i s: (i)$\Rightarrow$(ii) Sei $f:(A,m) \to (B,n)$ eine Deformation von B_0. Wir haben zu zeigen, f ist tangential flach.

Wegen $gr_{F_B}(B) \cong gr_{F_{\hat{B}}}(\hat{B})$ ist dafür hinreichend, daß der induzierte Homomorphismus $\hat{f}: \hat{A} \to \hat{B}$ tangential flach ist. $\hat{f}$ ist flach, da $\hat{B}$ flach über B ist, und genügt auch den weiteren Bedingungen aus Definition (2.5.a). (Dies folgt bei (i) und (ii) unmittelbar aus deren Konstruktion, (iii) ergibt sich aus $gr(B/F_A^1 B) \cong gr((B/F_A^1 B)^\wedge) \cong gr(\hat{B}/F_{\hat{A}}^1 \hat{B})$.) Damit ist $\hat{f}$ eine Deformation von B_0. Wir können also annehmen, daß B n-adisch vollständig ist.

Für die tangentiale Flachheit von f ist nach Folgerung (1.12.ii) hinreichend, daß die Homomorphismen $f \otimes_A A/F_A^d : A/F_A^d \to B/F_A^d B$ filtrierter lokaler Ringe tangential flach sind für alle $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Diese sind flach nach Basiswechsel und genügen auch den weiteren Bedingungen aus Definition (2.5.a). (Man beachte hierbei insbesondere, daß mit F_B auch $F_{B/F_A^d B}$ relative E-Filtration bezüglich y_0 ist.) Sie sind also Deformationen von B_0. Es sei bemerkt, daß mit B auch $B/F_A^d B$ im Sinne der kanonischen Filtration vollständig ist und daß A/F_A^d

artinsch und separiert ist.

Wir können also annehmen, daß B n-adisch vollständig und A artinsch und (stark) separiert ist.

Um die tangentiale Flachheit von $f: A\to B$ zu beweisen, zeigen wir die tangentiale Flachheit von $f\otimes_A A/J$: $A/J\to B/JB$ für alle Ideale I in A per Induktion nach der Länge $l := l(A/J)$.

Im Falle $l = 1$ ist A/J ein Körper, also $f\otimes_A A/J$ trivialerweise tangential flach.

Sei jetzt $l > 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(a) Es gilt $F^1_{A/J} = (0)$.

Dies bedeutet $F^1_A(A/J) = (0)$, also $F^1_A \subseteq J$. $f\otimes_A A/J$: $A/J\to B/JB$ entsteht also durch Basiswechsel aus $f\otimes_A A/F^1_A$: $A/F^1_A \to B/F^1_A B$, was laut Voraussetzung tangential flach ist.

(b) Es gilt $F^1_{A/J} \neq (0)$.

Nach dem folgenden Lemma (2.21) existiert ein von Null verschiedenes Sockelelement t in A/J mit $t\in F^1_{A/J}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist der Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe

$$f\otimes_A A/J\otimes_{A/J}(A/J)/t(A/J) = f\otimes_A A/(J+tA) : A/(J+tA)\to B/(J+tA)B$$

tangential flach.

Da $F_{A/J}$ stark separiert und E eine separiert filtrierende Familie ist, ist auch die relative E-Filtration $F_{B/JB}$ stark separiert nach Lemma (2.4.v).

Nach Proposition (2.9) existiert ein kommutatives Diagramm von Homomorphismen filtrierter lokaler Ringe

$$\begin{tikzcd} A/J \arrow[rr, "f\otimes A/J"] \arrow[dr, "g"'] & & B/JB \\ & R \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd},$$

wobei g tangential flach, h surjektiv und $F_{B/JB}$ die Bildfiltration von F_R ist. Da E endlich erzeugt ist, ist hierbei $gr_{F_{R_0}}(R_0)$ (mit $R_0 := R/mR$) noethersch. Desweiteren kann F_R stark separiert gewählt werden.

Damit sind wir in der Situation von Proposition (2.17).

Mit $I := \ker(h)$ gilt nun $B/JB \cong R/I$ und damit $\hat{B}_0 \cong (R/I)/m(R/I) = (R/mR)/I(R/mR) = R_0/I_0$. I_0 ist also der Kern des von h induzierten Homomorphismus h_0: $R_0\to \hat{B}_0$. Dieser kann als eine kanonische Surjektion $L[[Y_1,...,Y_r]]/H\to \hat{B}_0$ gewählt werden. Sei $K/H = I_0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} N_{gr(I_0,R_0)}(<-ord_{F_{A/I}}(t)) &= N_{gr(K/H,L[[Y_1,...,Y_r]]/H)}(<-ord_{F_{A/I}}(t)) \\ &\leq N_{gr(K,L[[Y_1,...,Y_r]])}(<-ord_{F_{A/I}}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= N_{gr(\hat{B}_0)}(<-\mathrm{ord}_{F_{A/I}}(t)) \\ &\leq N_{gr(\hat{B}_0)}(<-1) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Man beachte, $t\in F^1_{A/I}$ hat mindestens die Ordnung 1. Ferner sind das folgende Lemma (2.22), die Definition von $N_{gr(\hat{B}_0)}$ und die Voraussetzung (ii) benutzt worden.

Nach Proposition (2.17) ist $f\otimes_A A/J\colon A/J\to B/JB$ auch im 2. Fall tangential flach.

Die Behauptung ist bewiesen.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Wir nehmen an, Aussage (iii) wäre falsch.

Sei $L\hookrightarrow \hat{B}_0$ ein Koeffizientenkörper. Wir setzen

$A:= L[[t]]/(t^2)$,

$B:= \hat{B}_0[[t]]/(t^2)\cong A\otimes_L \hat{B}_0$.

Die kanonische Abbildung $f\colon A\to B$ ist offenbar ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe mit der Faser $\hat{B}_0$ und nach Basiswechsel flach. t ist ein Sockelelement von A. Mit $R:= L[[Y_1,\dots,Y_r,t]]/(t^2)$ existiert nun ein kommutatives Diagramm von lokalen Homomorphismen lokaler Ringe

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & R \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} .$$

Hierbei gelte $g(t)= t$ und $h(t)= t$, g induziere die Identität von L und h induziere die kanonische Surjektion $L[[Y_1,\dots,Y_r]]\twoheadrightarrow\hat{B}_0(\hookrightarrow B)$, (das heißt die Einschränkung $L\to\hat{B}_0$ ist der fixierte Koeffizientenkörper und es gilt $Y_i\mapsto y_{0i}$ für alle i).

Insbesondere ist h surjektiv.

Wir definieren nun eine filtrierende Familie E' mit $E'_d\subseteq \mathbb{N}^{r+1}$ für alle $d\in\mathbb{N}$ durch

$(a_1,\dots,a_r,a)\in E'_d \Leftrightarrow \exists i\in\mathbb{N}\colon (a_1,\dots,a_r)\in E_i, a+i\geqslant d$.

Trivialerweise ist mit E auch E' koendlich filtrierend.

Wir wollen nun zeigen, daß E' auch separiert filtrierend ist.

Sei $k\in\mathbb{N}$ vorgegeben. Dann existiert ein $\bar{d}\in\mathbb{N}$ derart, daß $(a_1,\dots,a_r)\in E_{\bar{d}}$ $\ a_1+\dots+a_r\geqslant k$ liefert, denn E ist separiert filtrierend. Sei nun $(a_1,\dots,a_r,a)\in E'_d$ mit $d:=\bar{d}+k$. Dann muß $a\geqslant k$ oder $(a_1,\dots,a_r)\in E_{\bar{d}}$, also in jedem Falle $a_1+\dots+a_r+a\geqslant k$ gelten Dies war zu zeigen.

Wir versehen nun R mit der durch $(Y_1,\dots,Y_r,t)$ definierten E'-Filtration und B mit der durch $(y_{01},\dots,y_{0r},t)$ definierten E'-Filtration. F_A sei die kanonische Filtration, das heißt es gelte

$F_A^1 = (t)$ und $F_A^d = (0)$ für $d \geq 2$.
Dann ist F_B die Bildfiltration von F_R; f,g und h sind Homomorphismen filtrierter lokaler Ringe.
Seien nun $\overline{A} := L[[t]]$ mit der kanonischen Filtration $F_{\overline{A}}$ und $\overline{R} := L[[Y_1,\ldots,Y_r,t]]$ mit der durch $(Y_1,\ldots,Y_r,t)$ definierten E'-Filtration $F_{\overline{R}}$ versehen und $\overline{g}: \overline{A} \to \overline{R}$ die kanonische Abbildung.
Offenbar ist $\overline{g}$ ein Homomorphismus filtrierter lokaler Ringe.
Wir wollen mittels Lemma (2.10) zeigen, daß $\overline{g}$ tangential flach ist.
Untersuchen wir also die Filtration F_{R_0} auf der Faser von $\overline{g}$ $R_0 = L[[Y_1,\ldots,Y_r]]$. $F_{\overline{R}}^d$ wird von allen Monomen $Y_1^{a_1} \bullet \ldots \bullet Y_r^{a_r} \bullet t^a$ mit $(a_1,\ldots,a_r) \in E_i$ und $i+a \geq d$ erzeugt. Beim Übergang zur Faser verschwinden nur die Monome mit a=0 nicht, das heißt F_{R_0} wird von allen Monomen $Y_1^{a_1} \bullet \ldots \bullet Y_r^{a_r}$ mit $(a_1,\ldots,a_r) \in E_i$ und $i \geq d$ erzeugt.
F_{R_0} ist also die durch $(Y_1,\ldots,Y_r)$ definierte E-Filtration.
Nach der Definition von E' gilt nun

$$\mathrm{ord}_{F_{\overline{R}}}(Y_1^{a_1} \bullet \ldots \bullet Y_r^{a_r} \bullet t^a) = \mathrm{ord}_{F_{\overline{A}}}(t^a) + \mathrm{ord}_{F_{R_0}}(Y_1^{a_1} \bullet \ldots \bullet Y_r^{a_r}) .$$

Damit ist $\overline{g}$ tangential flach und nach Basiswechsel auch g.
Wir sind also in der Situation von Proposition (2.14).
Mit $I := \ker(h)$ gilt $B \cong R/I$ und damit $\hat{B}_0 \cong (R/I)/t(R/I) = (R/tR)/I(R/tR) = R_0/I_0$. $\hat{I}_0$ ist also der Kern des von h induzierten Homomorphismus $h_0: R_0 \to B_0$. Dieser ist jedoch die kanonische Surjektion $L[[Y_1,\ldots,Y_r]] \to \hat{B}_0$. Nach unserer Annahme gilt

$$\begin{aligned}(0) &\neq \mathrm{gr}(N_{\hat{B}_0})(<-1)\\ &= \mathrm{gr}(N_{I_0})(<-\mathrm{ord}_{F_A}(t)) .\end{aligned}$$

Proposition (2.14) liefert nun ein Ideal I' in R derart, daß $f': A \to R/I' =: B'$ ebenfalls die Faser $\hat{B}_0$ hat, flach aber nicht tangential flach ist. Nach unserer Konstruktion ist $F_{B'}$ eine relative E-Filtration bezüglich y_0 über F_A. Wegen $F_A^1 = m = (t)$ ist $f' \otimes_A A/F_A^1$ tangential flach. f' ist also eine Deformation von B_0, die nicht tangential flach ist.
Daher ist Aussage (ii) falsch. Wir haben einen Widerspruch erhalten.

Q.E.D.

(2.21) LEMMA

Sei (A,m) ein artinscher lokaler Ring, Soc(A):= Ann(m) dessen Sockel. I sei ein von Null verschiedenes Ideal in A. Dann gilt

$I \cap \mathrm{Soc}(A) \neq (0)$.

B e w e i s: Sei $(0)=M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_l = I$ eine Kompositionsreihe von I als A-Modul. Es gilt $mM_1 \subseteq M_1$. Das Lemma von Nakayama liefert $mM_1 \subset M_1$, so daß wegen $l(M_1)=1$ $mM_1=(0)$ gelten muß. Es ergibt sich $(0) \neq M_1 \subseteq I \cap \mathrm{Soc}(A)$.

Q.E.D.

(2.22) LEMMA

Seien R ein filtrierter lokaler Ring und $K \subseteq H$ zwei Ideale in R. Dann existiert (in kanonischer Weise) ein graduierter Monomorphismus

$$N_{gr(H/K,R/K)} \hookrightarrow N_{gr(H,R)} .$$

B e w e i s: Wir berechnen beide Normalenmoduln. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} N_{gr(H,R)} &= \mathrm{Hom}_{gr(R)}(gr(H,R), gr(R)/gr(H,R)) \\ &= \mathrm{Hom}_{gr(R)}(gr(H,R), gr(R/H)) . \end{aligned}$$

$gr(H/K,R/K)$ ist der Kern der kanonischen Surjektion $gr(R/K) \twoheadrightarrow gr(R/H)$, also von $gr(R)/gr(K,R) \twoheadrightarrow gr(R)/gr(H,R)$. Folglich gilt $gr(H/K,R/K)= gr(H,R)/gr(K,R)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} N_{gr(H/K,R/K)} &= \mathrm{Hom}_{gr(R/K)}(gr(H/K,R/K), gr(R/K)/gr(H/K,R/K)) \\ &= \mathrm{Hom}_{gr(R)/gr(K,R)}(gr(H,R)/gr(K,R), gr(R/H)) . \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung.

Q.E.D.

(2.23) KONVENTION

Seien L ein Körper, $X_1,\ldots,X_r$ Unbestimmte, $R_0 := L[[X_1,\ldots,X_r]]$, I_0 ein Ideal in R_0 und $B_0 := L[[X_1,\ldots,X_r]]/I_0$. Ferner sei F eine (in $(X_1,\ldots,X_r)$ monomiale) Filtration auf R_0. Wir werden im Folgenden der Einfachheit halber die Formulierung benutzen,

B_0 *hat mit der Filtration* F *nur tangential flache Deformationen.*

Dies soll bedeuten, der monomial filtrierte lokale Ring $(B_0,\overline{X},E)$ hat nur tangential flache Deformationen. Hierbei seien

$\overline{X} := (\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_r)$ mit $\overline{X}_i := (X_i \bmod I_0)$

und E die durch F und $(X_1,\ldots,X_r)$ definierte filtrierende Familie. (vgl. Beispiel (1.4.b))

(2.24) BEMERKUNGEN

Unser Satz (2.20) verallgemeinert Theorem (2.5) der Arbeit [He-1]. Dort werden, übersetzt in die Sprache der vorliegenden Arbeit, filtrierte lokale Ringe (B_0,y_0,E) betrachtet, bei denen

$E_d = \{(a_1,...,a_r)\in\mathbb{N}^r: a_1+...+a_r \geqslant d\}$
gilt, B_0 also mit der kanonischen Filtration versehen ist. Als Deformationen werden nur solche Homomorphismen $f:(A,m)\rightarrow(B,n)$ filtrierter lokaler Ringe zugelassen, bei denen F_A (und damit auch F_B) die kanonische Filtration ist. In dieser Situation werden dann die Implikationen (i)⇒(ii)⇒(iii) gezeigt, die wir verallgemeinert haben.

In [He-1] wurde für eine Reihe lokaler Ringe $B_0 := R_0/I_0$ mit $R_0 := L[[X_1,...,X_r]]$ gezeigt, daß sie, im Sinne jener Arbeit, nur tangential flache Deformationen besitzen. Dazu wurde jeweils $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1) = (0)$ nachgerechnet. Laut Satz (2.20) bedeutet dies, B_0 hat mit der kanonischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen (vgl. Konvention (2.23)). Das ist eine etwas allgemeinere Aussage als bei [He-1], da hier auch Deformationen $f:(A,m)\rightarrow(B,n)$, bei denen F_A nicht die kanonische Filtration ist, zulässig sind.

Dies betrifft, neben vielen anderen, die lokalen Ringe
$B_0 := L[[X,Y,Z]]/(X^3,Y^3,Z^3,X^2Y,Y^2Z,Z^2X)$ und
$B_0 := L[[X,Y,Z]]/(X^2+YZ,Y^2+XZ,XY)$
(vgl. [He-1], Examples (2.7), (2.8)) und übrigens auch den Fall, daß B_0 regulär ist.

Es bleibt die Frage nach der Nützlichkeit unseres Satzes (2.20). Wir wollen darauf im letzten Abschnitt der Arbeit eingehen. Es wird sich herausstellen, daß er dazu benutzt werden kann, für bestimmte Singularitäten die Gültigkeit von Lech- Hironaka-Ungleichungen (vgl. Bemerkung (3.1) weiter unten in dieser Arbeit) zu zeigen.

Wir konstruieren nun Beispiele lokaler Ringe $B_0 := R_0/I_0$ mit $R_0 := L[[X,Y,Z]]$, die mit gewissen (nicht kanonischen) Filtrationen auf R_0 nur tangential flache Deformationen besitzen.
Wir hoffen, es wird schon hier klar, daß diese Beispiele nicht übermäßig künstlich konstruiert sind, sondern daß im Gegenteil sehr viele davon existieren.

(2.25) BEISPIEL

Es sei $B_0 := R_0/I_0$ mit $R_0 := L[[X,Y,Z]]$ und $I_0 := (X^2,XY,Z^2)$.
F sei die (X,Y,Z^2)-adische Filtration auf R_0.
Dann hat B_0 mit F nur tangential flache Deformationen.
(vgl. Beispiel (1.25))

B e w e i s: Wir haben $N_{gr(B_0)}(<-1)= 0$ zu zeigen. Offenbar gilt $gr(R_0)\cong L[X,Y,Z]$ als L-Vektorraum, aber für die Multiplikation

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}\bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}= \begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls (*) gilt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$(*)\ \operatorname{ord}(X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2})= \operatorname{ord}(X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1})+ \operatorname{ord}(X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}) .$$

Da F mit der durch (X,Y,Z) definierten q-Filtration mit $q= (1,1,\frac{1}{2})$ übereinstimmt, vereinfacht sich (*) zu $\left\{\frac{c_1+c_2}{2}\right\}= \left\{\frac{c_1}{2}\right\}+\left\{\frac{c_2}{2}\right\}$, also

$$(+)\ \left\{\frac{c_1}{2}\right\}+ \left\{\frac{c_2}{2}\right\}< 1.$$

Es ergibt sich (siehe Beispiel (1.25)), daß (X^2,XY,Z^2) eine Standardbasis von I_0 bildet, also $X^2,XY,Z^2\in gr(I_0,R_0)\subseteq gr(R_0)$ das Ideal $gr(I_0,R_0)$ erzeugen.

Es gilt $\deg(X^2)= \deg(XY)= 2$ und $\deg(Z^2)= 1$. Die homogenen Elemente von $N_{gr(B_0)}$ des Grades d sind somit gegeben durch Tripel G von homogenen Polynomen G_1,G_2,G_3 mit $\deg(G_1)= \deg(G_2)= d+2$ und $\deg(G_3)= d+1$, für die die Implikation

$$\langle R,F\rangle=0\Rightarrow \langle R,G\rangle\in gr(I_0,R_0)$$

besteht. Hierbei sei $F= (X^2,XY,Z^2)\in gr(R_0)^3$, R ein beliebiges Tripel mit Koordinaten aus $gr(R_0)$ und alle Grade (und der Begriff "homogen") sind im Sinne der kanonischen Graduierung von $gr(R_0)$ zu verstehen. Es reicht somit zu zeigen, daß jedes solches Tripel G mit $\deg(G_1)= \deg(G_2)= 0$ und $G_3= 0$ verschwindet. Eine Kurzfassung des Beweises dieser Aussage ist in der folgenden Tabelle enthalten, die wir hier erläutern werden. Ähnliche Tabellen werden wir im Folgenden häufig, und im allgemeinen mit nur wenigen Kommentaren versehen, benutzen.

Erzeugende	F	X^2	XY	Z^2
eine Syzygie	R	Y	$-X$	
$N_{gr(B_0)}(<-1)$	G	A_1+A_2Z 0	B_1+B_2Z 0	0

Die Polynome in der ersten Zeile der Tabelle sind die Erzeugenden F_i des Ideals $gr(I_0,R_0)$. Darunter stehen Syzygien der F_i, die für den Beweis benötigt werden. Es sei bemerkt, daß dies Syzygien im Sinne der Multiplikation in $gr(R_0)$ sind. Die Angaben darunter beschreiben den Verlauf des Beweises.

Wir haben die allgemeine Form homogener Polynome vom Grad 0 in $gr(R_0)$ angesetzt. Dabei ist $A_i,B_i\in L$ für alle i. Damit gilt $\langle R,G\rangle= A_1Y+A_2YZ-B_1X-B_2XZ$. Man beachte auch hier, daß die Produkte im Sinne von $gr(R_0)$ gebildet worden sind. Die Elemente Y, YZ, X und XZ des Faktorrings $L[X,Y,Z]/(X^2,XY,Z^2)$ sind nun L-linear unabhängig. Die Annahme

$A_1Y+A_2YZ-B_1X-B_2XZ\in gr(I_0,R_0)=(X^2,XY,Z^2)$

liefert also

$A_1=A_2=B_1=B_2=0.$

Q.E.D.

(2.26) BEISPIEL

Es sei $B_0:=R_0/I_0$ mit $R_0:=L[[X,Y,Z]]$ und

$I_0:=(X^2YZ+XY^2Z,\ X^2YZ+XYZ^2,\ X^2YZ-Y^2Z^2)$.

F sei die $(X,Y,Z)^2$-adische Filtration auf R_0.

Dann hat B_0 mit F nur tangential flache Deformationen.

B e w e i s: Wir zeigen $N_{gr(B_0)}(<-1)=0$. Es gilt $gr(R_0)\cong L[X,Y,Z]$ als L-Vektorraum, für die Multiplikation jedoch

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}\bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}=\begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls (+) gilt}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Hierbei ergibt sich für die Bedingung (+)

$$(+)\quad \left\{\frac{a_1+b_1+c_1}{2}\right\}+\left\{\frac{a_2+b_2+c_2}{2}\right\}<1\ ,$$

denn F stimmt mit der durch (X,Y,Z) definierten q-Filtration mit $q=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ überein.

$X^2YZ+XY^2Z,\ X^2YZ+XYZ^2,\ X^2YZ-Y^2Z^2\in gr(R_0)$ sind homogene Elemente vom Grade 2. Die Exponentensumme in jedem auftretenden Monom ist gerade, so daß Produkte mit ihnen wie in R_0 gebildet werden. Wir haben es folglich bereits mit einem Erzeugendensystem von $gr(I_0,R_0)$ zu tun.

Für $N_{gr(B_0)}(<-1)$ ergibt sich folgende Tabelle.

Erzeugende	F	X^2YZ+XY^2Z	$X^2YZ+XYZ^2$	$X^2YZ-Y^2Z^2$
Grad		2	2	2
einige Syzygien	R_1	XZ	-YZ	-XZ
	R_2	Z^2	-XZ	XZ
$N_{gr(B_0)}(<-1)$	G	$A_1+B_1X+C_1Y+D_1Z$	$A_2+B_2X+C_2Y+D_2Z$	$A_3+B_3X+C_3Y+D_3Z$

Man beachte, die homogenen Elemente von $N_{gr(B_0)}$ des Grades -2 sind gegeben durch Tripel G, deren Koordinaten homogen vom Grad 0 sind. Deren allgemeine Form haben wir angesetzt.

Die Syzygie R_1 liefert nun $A_2=C_2=D_2=0$, die Syzygie R_2 $A_1=C_1=D_1=0$. Jetzt sichert R_1 $A_3=D_3=0$ und R_2 $C_3=0$. Mit Syzygie R_1 erhalten wir

$B_2=0$ und mit $R_2\ B_1=0$. Schließlich liefert R_1 oder $R_2\ B_3=0$.
Wir haben $N_{gr(B_0)}(<-1)=0$ erhalten.

Q.E.D.

Man könnte meinen, daß sich beide Syzygien R_1 und R_2 durch "Division durch Z" vereinfachen lassen. Dies liefert zwar tatsächlich Syzygien von F, doch sind diese für den Beweis von $N_{gr(B_0)}(<-1)=0$ nicht geeignet, da sie sich bezüglich der Multiplikation in $gr(R_0)$ zu ungünstig verhalten.

Der Satz (2.20) liefert für die tangentiale Flachheit aller Deformationen eines monomial filtrierten lokalen Rings eine notwendige und eine hinreichende Bedingung. Das folgende Beispiel (2.27) zeigt, daß diese im allgemeinen verschieden sind, der Satz also versagen kann.

(2.27) BEISPIEL

Es sei $B_0:=R_0/I_0$ mit $R_0:=L[[X,Y,Z]]$ und $I_0:=(X^2,XY,XZ,Y^2,YZ,Z^3)$.
F sei die (X,Y,Z^2)-adische Filtration auf R_0. Dann gilt

$N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)\neq 0$, aber

$gr(N_{I_0})(<-1)=0$.

B e w e i s: Zeigen wir zuerst $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)\neq 0$. Es gilt $gr(R_0)\cong L[X,Y,Z]$ als L-Vektorraum, für die Multiplikation jedoch

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}\bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}=\begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls } \left\{\frac{c_1}{2}\right\}+\left\{\frac{c_2}{2}\right\}<1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(vgl. Beispiele (1.25) und (2.25))

$gr(I_0,R_0)$ wird von allen Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache von X^2, XY, XZ, Y^2, YZ oder Z^3 sind. Um zu Vielfachen im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen zu können, ist jedes dieser Monome vom Typ $X^aY^bZ^c$ mit ungeradem c durch das Paar, bestehend aus $X^aY^bZ^c$ und $X^aY^bZ^{c+1}$, zu ersetzen. $gr(I_0,R_0)$ wird also von $X^2,XY,XZ,XZ^2,Y^2,YZ,YZ^2,Z^3,Z^4\in gr(R_0)$ erzeugt. Wir erhalten folgende Tabelle.

Lfd. Nummer	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Standardbasis	F_i	X^2	XY	XZ	XZ^2	Y^2	YZ	YZ^2	Z^3	Z^4
Grad		2	2	1	2	2	1	2	1	2
Syzygien	R_{ji}	...								
ein Element von $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)$	G_i	0	0	0	0	0	0	0	0	Z

Wir haben zu zeigen, daß für alle Syzygien R_j von F das entsprechende Skalarprodukt $\langle R_j, G\rangle = R_{j9}\bullet Z$ in $gr(I_0, R_0)$ liegt. Ist nun $X^aY^bZ^c$ ein Monom mit $a+b+c \geq 2$, so hat das Produkt $X^aY^bZ^c\bullet Z$ eine Exponentensumme von mindestens 3 oder es verschwindet. In beiden Fällen gilt offenbar $X^aY^bZ^c\bullet Z \in gr(I_0, R_0)$. Ferner liegen $X\bullet Z= XZ$, $Y\bullet Z= YZ$ und $Z\bullet Z= 0$ in $gr(I_0, R_0)$. Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, daß das Polynom R_{j9} ein von Null verschiedenes Absolutglied C enthält. $R_{j9}\bullet F_9$ enthält somit den Summanden CZ^4. Wegen

$$0= \langle R_j, F\rangle = \sum_{i=1}^{9} R_{ji}\bullet F_i$$

und der speziellen Wahl der Monome F_i ist dies aber nicht möglich. (Man beachte hierbei insbesondere, daß $Z\bullet F_8= Z\bullet Z^3= 0$ ist.)
Es ist $ord(Z^4)= 2$ und $ord(Z)= 0$. Wir haben also ein von Null verschiedenes Element aus $N_{gr(I_0,R_0)}(-2)$ gefunden.

Zeigen wir nun $gr(N_{I_0})(<-1)= 0$. Zur Untersuchung von N_{I_0} muß man von einem Erzeugendensystem von I_0 ausgehen. Wir wählen dafür wieder die obige Standardbasis, da dies im weiteren Verlauf der Rechnung Vorteile bringt. Sie wird wiederum mit F bezeichnet, es ist jedoch zu beachten, daß hier $F \in R_0^9$ gilt und auch alle weiteren Rechnungen in R_0 stattfinden. Die Elemente von N_{I_0} sind gegeben durch 9-Tupel G von Polynomen aus R_0, für die die Implikation

$$\langle R,F\rangle=0 \Rightarrow \langle R,G\rangle \in I_0$$

besteht. Hierbei sei R ein beliebiges 9-Tupel mit Koordinaten aus R_0. Wir erhalten folgende Tabelle.

Lfd. Nummer	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Erzeugendensystem	F_i	X^2	XY	XZ	XZ^2	Y^2	YZ	YZ^2	Z^3	Z^4
Ordnung		2	2	1	2	2	1	2	1	2
einige Syzygien	R_{1i}	Z		$-X$						
	R_{2i}		Z				$-X$			
	R_{3i}					Z	$-Y$			
	R_{4i}				Z				$-X$	
	R_{5i}							Z	$-Y$	
	R_{6i}								Z	-1
	R_{7i}			$-Z^2$					X	
N_{I_0}	G_i	...								

Sei nun $g \in N_{I_0}$ ein beliebiges Element des Normalenmoduls. Wir wollen zeigen, daß für alle $i \in \{1,...,9\}$

$$ord(g(F_i))= ord(G_i) \geq ord(F_i)-1$$

gilt. Für $i=3$, 6 und 8 ist dies trivial. Für die weiteren i ist zu zeigen, daß die Polynome G_i keine Glieder vom Typ C oder CZ mit $C\in L$ enthalten können. Für $i=1$, 2, 4, 5 und 7 folgt dies sofort mittels der Syzygien R_1, R_2, R_4, R_3 bzw. R_5. Es bleibt $i=9$ zu betrachten. Die Syzygie R_6 gestattet nur, daß G_9 ein Glied CZ und G_8 ein Glied C enthält. Dem widerspricht aber Syzygie R_7.

Sei nun $x\in I_0$ beliebig. Wir setzen $o:=\operatorname{ord}(x)$. Da F eine Standardbasis von I_0 bildet, gibt es nach Lemma (2.15) eine Darstellung

$$x=\sum_{i=1}^{9} X_i F_i$$

mit $X_i\in R_0$ und $\operatorname{ord}(X_i)+\operatorname{ord}(F_i)\geqslant o$ für alle i. Damit gilt

$$g(x)=\sum_{i=1}^{9} X_i g(F_i)=\sum_{i=1}^{9} X_i G_i$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(g(x)) &\geqslant \min_i (\operatorname{ord}(X_i)+\operatorname{ord}(G_i))\\ &\geqslant \min_i (\operatorname{ord}(X_i)+\operatorname{ord}(F_i)-1)\\ &\geqslant o-1\\ &= \operatorname{ord}(x)-1 .\end{aligned}$$

Wir haben $g\in F^{-1}_{N_{I_0}}$ erhalten. Da $g\in N_{I_0}$ beliebig gewählt war, folgt $F^{-1}_{N_{I_0}}=N_{I_0}$ und $\operatorname{gr}(N_{I_0})(<-1)=0$.

Q.E.D.

3. LECH- HIRONAKA- UNGLEICHUNGEN

(3.1) BEMERKUNG

Wir betrachten flache lokale Homomorphismen $f:(A,m)\to(B,n)$ lokaler Ringe. Auf C. Lech geht das Problem zurück, ob in dieser Situation stets für geeignete Summentransformierte der Hilbertreihen (im Sinne kanonischer Filtrationen) die Ungleichung

$$H_B^i \geqslant H_A^i$$

gilt. Im Zusammenhang mit der Auflösung der Singularitäten stellte H. Hironaka die Frage, ob sogar immer

$$H_B^1 \geqslant H_A^1$$

erfüllt ist. Ist die Faser B_0 des Homomorphismus f d-dimensional, so gilt dim B = dim A + d, so daß hier natürlicherweise verschärfte Ungleichungen vom Typ

$$H_B^i \geqslant H_A^{i+d}$$

zu untersuchen sind. Betrachtet man anstelle von Hilbertreihen lediglich Multiplizitäten, so vereinfacht sich die letzte Ungleichung zu

$$e(B) \geqslant e(A).$$

Die Hauptschwierigkeit beim Beweis solcher Ungleichungen sind die vielen Unbestimmten, nämlich zwei lokale Ringe und ein Homomorphismus zwischen ihnen. Es wäre somit wenig sinnvoll, Ergebnisse für einzelne, konkrete Homomorphismen anzustreben. Es erscheint jedoch ein vernünftiger Spezialfall zu sein, wenn man eine der obigen Ungleichungen für alle flachen lokalen Homomorphismen $f:(A,m)\to(B,n)$ mit einer fixierten Faser (B_0,n_0) zeigen kann.

Die hierzu bisher bekannten Ergebnisse sind recht bescheiden. So zeigte C. Lech selbst die Ungleichung $H_B^1 \geqslant H_A^1$, wenn (B_0,n_0) ein vollständiger Durchschnitt ist (vgl. [L-2]). Dies läßt sich noch auf den Fall verallgemeinern, daß (B_0,n_0) eine formale semiuniverselle Deformation mit regulärer Basis besitzt (vgl. [He-3]). Desweiteren gilt $H_B^1 \geqslant H_A^1$, wenn (B_0,n_0) (im Sinne kanonischer Filtrationen) nur tangential flache Deformationen besitzt (vgl. [He-1]). In einer noch wesentlich spezielleren Situation, nämlich wenn (B_0,n_0) Faktorring eines regulären lokalen Rings nach einem Hauptideal ist, zeigte J.-J. Risler sogar $H_B^0 \geqslant H_A^0$ (vgl. [Ri]). Ferner sind die Arbeiten [V], [Hi], [Si], [L-L] und [Lj] zu beachten, insgesamt ist jedoch festzustellen, daß für die obigen Ungleichungen bisher nur wenige positive Beispiele und keine Gegenbeispiele existieren.

Wir wollen weitere positive Beispiele gewinnen unter der Voraussetzung, daß (B_0, n_0) mit einer gewissen (nicht kanonischen) Filtration nur tangential flache Deformationen besitzt. Die entscheidende Idee dazu besteht in einer Ungleichung zwischen bestimmten Längen, die wir als Lemma (3.4) formulieren werden. Für deren Beweis benötigen wir aus technischen Gründen eine Verallgemeinerung des Begriffes "Filtration" und eine entsprechende Verallgemeinerung des Begriffes "assoziierter graduierter Ring" auf die Situation allgemeinerer Indexmengen vom Typ $\mathbb{N}^n$ bzw. $\mathbb{Z}^n$. Wir sprechen dann von Multifiltrationen oder n- Filtrationen. Wir schränken uns hierbei nicht auf lokale Ringe ein, da wir später eine allgemeinere Situation zu betrachten haben.

(3.2) DEFINITIONEN

Wir betrachten $\mathbb{Z}^n$ als kommutative Gruppe bezüglich der gewöhnlichen Addition. $\ll$ sei eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}^n$, die mit der Operation verträglich (das heißt $x \ll y$ impliziert $xz \ll yz$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}^n$) und deren Einschränkung auf $\mathbb{N}^n$ eine Wohlordnung ist. (Daraus ergibt sich zum Beispiel, daß $(0,\ldots,0)$ bezüglich $\ll$ das kleinste Element von $\mathbb{N}^n$ ist.) Ist $d \in \mathbb{N}^n$, so bezeichnen wir seinen Nachfolger mit d^ν.

Eine *Multifiltration*, genauer n- *Filtration* auf dem Ring A ist dann eine Familie $(F_A^d)_{d \in \mathbb{N}^n}$ von Idealen in A mit

(a) $F_A^{d_1} \supseteq F_A^{d_2}$ für alle $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^n$ mit $d_1 \ll d_2$,

(b) $F_A^0 = A$ und $F_A^d \neq A$ falls $d \in \mathbb{N}^n$, $d \neq 0$,

(c) $F_A^{d_1} \bullet F_A^{d_2} \subseteq F_A^{d_1+d_2}$ für alle $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^n$.

Sei A ein Ring, der mit einer n- Filtration F_A versehen ist. Dann wird die direkte Summe

$$\bigoplus_{d \in \mathbb{N}^n} F_A^d / F_A^{d^\nu}$$

mit der Multiplikation

$$(a \bmod F_A^{d^\nu}) \bullet (a' \bmod F_A^{d'^\nu}) := (aa' \bmod F_A^{(d+d')^\nu})$$

für $a \in F_A^d$, $a' \in F_A^{d'}$ versehen, zu A *assoziierter multigraduierter* bzw. *n- graduierter Ring* genannt und mit $gr_{F_A}(A)$ bezeichnet. Ist M ein A- Modul, so heißt die direkte Summe

$$\bigoplus_{\mu \in O(\tau)} F_A^d M / F_A^{d^\nu} M \ ,$$

versehen mit der Multiplikation mit Elementen aus $gr_{F_A}(A)$

$$(a \bmod F_A^{d^\nu})\bullet(m \bmod F_A^{d'^\nu}M) := (am \bmod F_A^{(d+d')^\nu}M)$$

für $a\in F_A^d$, $m\in F_A^{d'}\bullet M$ *zu M assoziierter multigraduierter* $gr_{F_A}(A)$-*Modul* und wird mit $gr_{F_A}(M)$ bezeichnet.

Seien $f: A\to B$ ein Homomorphismus von Ringen und F_A eine n- Filtration auf A. Wir nehmen $f(F_A^d)\neq B$ für alle $d\in\mathbb{N}^n$ mit $d\neq 0$ an, was zum Beispiel bei lokalen Homomorphismen lokaler Ringe erfüllt ist. Dann definiert

$$F_B^d := f(F_A^d)B \text{ für alle } d\in\mathbb{N}^n$$

eine n- Filtration auf B, die wir *Bild- n- Filtration* nennen.

Seien A ein Ring, der mit einer n- Filtration F_A versehen ist, und $I\subset A$ ein echtes Ideal in A. Der Faktorring A/I wird mit der Bild- n- Filtration $F_{A/I}$ versehen (,falls für alle $d\in\mathbb{N}^n$ mit $d\neq 0$ $I+F_A^d\neq A$ gilt, was zum Beispiel im lokalen Fall trivial ist). Dann induziert die natürliche Abbildung $p:A\to A/I$ eine kanonische Surjektion

$$gr(p):\ gr_{F_A}(A)\to gr_{F_A}(A/I) = (gr_{F_{A/I}}(A/I)) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} F^d+I/F^{d^\nu}+I\ .$$

Deren Kern ist ein homogenes Ideal im multigraduierten Ring $gr_{F_A}(A)$, heißt *Anfangsformenideal* von I in $gr_{F_A}(A)$, und wird mit $gr_{F_A}(I,A)$ bezeichnet.

Es sei bemerkt, daß

$$\begin{aligned} gr_{F_A}(I,A) &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} (F_A^{d^\nu}+I)\cap F_A^d/F_A^{d^\nu} \\ &= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} I\cap F_A^d+F_A^{d^\nu}/F_A^{d^\nu} \end{aligned}$$

gilt. Nennt man für $x\in A$

$$in(x) = in_{F_A}(x) := \begin{cases} (x \bmod F_A^{d^\nu}) & \text{falls } x\in F_A^d\setminus F_A^{d^\nu} \text{ mit } d\in\mathbb{N}^n \\ 0 & \text{falls für kein } d\in\mathbb{N}^n\ x\in F_A^d\setminus F_A^{d^\nu} \text{ gilt} \end{cases}$$

die *Anfangsform* von x in $gr_{F_A}(A)$, so erzeugen die Anfangsformen aller Elemente aus I gerade $gr_{F_A}(I,A)$.

(3.3) BEMERKUNGEN

Bisher haben wir uns mit der Situation beschäftigt, daß n=1 und $\ll$ die gewöhnliche Relation $\leqslant$ in den ganzen Zahlen ist. In Definition (3.2) haben wir grundlegende Begriffe, die mit Filtrationen zusammenhängen, verallgemeinert. Es ergibt sich natürlicherweise die Frage, ob es möglich und nützlich ist, den Begriff der tangentialen Flachheit entsprechend zu verallgemeinern. Diese Frage muß

jedoch aufgrund ihrer Schwierigkeit in dieser Arbeit offen bleiben.
Wir werden Multifiltrationen nur zweimal aus technischen Gründen anwenden: Zunächst, auf lokalen Ringen, zum Beweis des folgenden Lemmas (3.4) und später, um das Problem der tangentialen Flachheit aller Deformationen einer gegebenen Singularität auf eine (in einem gewissen Sinne) einfachere Singularität zurückzuführen (Satz (3.18)). Beim letzteren wird es notwendig sein, Ringe zu betrachten, die nicht lokal sind.
Seien nun A ein artinscher Ring, F_A eine n- Filtration auf A. Dann gilt offenbar

$$l_A(gr_{F_A}(A)) \leqslant l(A).$$

Hierbei tritt die Gleichheit genau dann ein, wenn
(i) für einen gewissen Multiindex $d \in \mathbb{N}^n$ $F_A^d=(0)$ gilt
und
(ii) für jedes Limeselement $d \in \mathbb{N}^n$ (das heißt d ist bezüglich $\ll$ nicht unmittelbarer Nachfolger eines Elementes aus $\mathbb{N}^n$) ein Multiindex $d' \ll d$ existiert mit $F_A^{d'} = F_A^d$.
Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun der angekündigten Ungleichung zu.

(3.4) LEMMA
Es seien (R,M) ein lokaler Ring und $X_1,...,X_m$ Unbestimmte. Wir betrachten den Faktorring

$$B:= R[[X_1,...,X_m]]/(I,r_1X_1^{\alpha_{11}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}},...,r_1X_1^{\alpha_{11}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}}),$$

wobei I ein beliebiges Ideal in $R[[X_1,...,X_m]]$ und $r_iX_1^{\alpha_{i1}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{im}}$ Monome mit Koeffizienten $r_i \in R$ sind. Mit einer gewissen Zahl $d \in \mathbb{N}$ sei

$$B':= R[[X_1,...,X_m]]/(I,r_1X_1^{d\alpha_{11}}X_2^{\alpha_{12}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}},...,r_1X_1^{d\alpha_{11}}X_2^{\alpha_{12}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}}).$$

Ist dann B artinsch, so gilt

$$l(B') \leqslant d\bullet l(B).$$

B e w e i s: Wir führen der Einfachheit halber die folgenden Bezeichnungen ein.

$$J := (I,r_1X_1^{\alpha_{11}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}},...,r_1X_1^{\alpha_{11}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}})$$

$$J':= (I,r_1X_1^{d\alpha_{11}}X_2^{\alpha_{12}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}},...,r_1X_1^{d\alpha_{11}}X_2^{\alpha_{12}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}})$$

Es gilt also $B= R[[X_1,...,X_m]]/J$ und $B'= R[[X_1,...,X_m]]/J'$.
Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

Erster Schritt: Das Ideal I in $R[[X_1,...,X_m]]$ verschwinde.
(Man könnte hier ebenso fordern, das Ideal I werde von Monomen vom Typ $rX_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot X_m^{\alpha_m}$ mit $r\in R$ erzeugt. Dies ist zwar eine etwas allgemeinere Situation, wird aber später nicht benötigt.)

G: $R[[X_1,...,X_m]]\to R[[X_1,...,X_m]]$ sei der Ringhomomorphismus mit $X_1\mapsto X_1^d$, $X_2\mapsto X_2$, ..., $X_m\mapsto X_m$, der die Identität von R induziert.
Da I verschwindet, gilt $G(J)\subseteq J'$. G induziert daher einen lokalen Homomorphismus

Φ: $B= R[[X_1,...,X_m]]/J\to B' = R[[X_1,...,X_m]]/J'$

lokaler Ringe. Dessen Faser F ist offenbar ein Faktorring von $(R/M)[[X_1]]/(X_1^d)$ und hat damit höchstens die Länge d.

Wir versehen nun B und B' mit den kanonischen Filtrationen.
Nach Satz (1.8.i) gilt dann für die Hilbertreihen $H^1_{B'}\leqslant H^1_B\cdot H^0_F$, was für alle $e\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H^1_{B'}(e) &\leqslant \sum_{i=0}^{e} H^1_B(e-i)\cdot H^0_F(i) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{e} H^1_B(e)\cdot H^0_F(i) \\ &\leqslant H^1_B(e)\cdot l(F) \\ &\leqslant d\cdot H^1_B(e) \end{aligned}$$

bedeutet. Dies liefert für große $e\in\mathbb{N}$

$l(B')\leqslant d\cdot l(B)$,

also die Behauptung.

Zweiter Schritt: Das Ideal I in $R[[X_1,...,X_m]]$ sei beliebig.
Wir führen auf $\mathbb{Z}^n$ eine Relation $\ll$ ein. Es sei

$(a_1,...,a_m)\ll (b_1,...,b_m)$

falls mit einem gewissen $i\in \{1,...,m+1\}$

$a_i< b_i$ und

$a_j= b_j$ für alle $j\in \{1,...,i-1\}$

gilt. (Für i=1 bedeute dies sinngemäß $a_1 < b_1$; für i=m+1 $a_1 = b_1$,..., $a_m= b_m$.)
Offenbar ist die Einschränkung von $\ll$ auf $\mathbb{N}^n$ eine Wohlordnung.

Wir konstruieren nun eine m- Filtration F auf $R[[X_1,...,X_m]]$.
Sei dazu

$$F^d:= (X_1^{e_1}\cdot...\cdot X_m^{e_m})_{d\ll e,\, e\in\mathbb{N}^n} \subseteq R[[X_1,...,X_m]]$$

das Ideal in $R[[X_1,..,X_m]]$, das von allen Monomen in $X_1,...,X_m$ ohne Koeffizienten, deren Exponenten- Multiindizes (im Sinne der Relation $\ll$) größer als d sind, erzeugt wird. Man überprüft unschwer, daß die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Definition (3.2) erfüllt sind.

Betrachten wir also bezüglich der n- Filtration F assoziierte multigraduierte Ringe. Es gilt

$gr_F(B) = gr_F(R[[X_1,...,X_m]])/gr_F(J,\ R[[X_1,...,X_m]])$ und

$gr_F(B') = gr_F(R[[X_1,...,X_m]])/gr_F(J',R[[X_1,...,X_m]])$.

Hierbei ist aufgrund der speziellen Wahl von $\ll$ und F

$gr_F(R[[X_1,...,X_m]]) \cong R[X_1,...,X_m]$

einschließlich der Multiplikation. Die Ideale

$gr_F(J,R[[X_1,...,X_m]])$ und $gr_F(J',R[[X_1,...,X_m]])$

in diesem Ring werden von den Anfangsformen der Elemente aus J bzw. J' bezüglich $\ll$ und F erzeugt, also von Monomen in $X_1,...,X_m$ mit Koeffizienten aus R. Wir bemerken, daß hier tatsächlich jede von Null verschiedene Potenzreihe aus $R[[X_1,...,X_m]]$ eine von Null verschiedene Anfangsform hat, der in der Definition betrachtete Ausnahmefall hier also nicht eintritt.

Wir zeigen nun die folgende Aussage:

Ist $rX_1^{a_1}\bullet...\bullet X_m^{a_m} \in gr_F(J,R[[X_1,...,X_m]])$ mit $r \in R$, so folgt

$rX_1^{da_1}X_2^{a_2}\bullet...\bullet X_m^{a_m} \in gr_F(J',R[[X_1,...,X_m]])$.

Sei also $rX_1^{a_1}\bullet...\bullet X_m^{a_m} \in gr_F(J,R[[X_1,...,X_m]])$. Dann gibt es ein Element aus J, das heißt eine Summe aus einem Element aus I und Vielfachen der $r_iX_1^{\alpha_{i1}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{im}}$, dessen Anfangsform bezüglich $\ll$ und F $rX_1^{a_1}\bullet...\bullet X_m^{a_m}$ ist. Da andere Monome ohnehin keinen Einfluß auf die Anfangsform haben, kann man sich auf alle i mit $(\alpha_{i1},...,\alpha_{im}) \ll (a_1,...,a_m)$, also speziell $\alpha_{i1} \leqslant a_1$ beschränken.

Mittels Multiplikation mit

$$X_1^{(d-1)a_1}$$

erhält man eine Summe aus einem Element aus I und Vielfachen der

$$r_iX_1^{\alpha_{i1}+(d-1)a_1}X_2^{\alpha_{i2}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{im}},$$

deren Anfangsform gerade $r_iX_1^{da_1}\bullet X_2^{a_{i2}}\bullet...\bullet X_m^{a_{im}}$ ist. Für die Behauptung $rX_1^{da_1}\bullet X_2^{a_2}\bullet...\bullet X_m^{a_m} \in gr_{\alpha,F}(J',R[[X_1,...,X_m]])$ bliebe $\alpha_{i1} + (d-1)a_1 \geqslant d\alpha_{i1}$ zu zeigen. Dies folgt aber aus $\alpha_{i1} \leqslant a_1$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} l_B(gr_F(R[[X_1,...,X_m]])/gr_F(J,R[[X_1,...,X_m]]) &= l_B(gr_F(B)) \\ &\leqslant l(B) \\ &< \infty . \end{aligned}$$

Die Länge des Ringes $gr_F(R[[X_1,...,X_m]])/gr_F(J,R[[X_1,...,X_m]])$ stimmt aber mit dessen Länge, sowohl als B- Modul, als auch als R- Modul überein und es ist $gr_F(R[[X_1,...,X_m]]) \cong R[X_1,...,X_m]$. Damit muß ein N existieren mit

$$(X_1,...,X_m)^N \subseteq gr_F(J,\ R[[X_1,...,X_m]]).$$

Unsere obige Aussage liefert dann

$$(X_1,...,X_m)^{dN} \subseteq gr_F(J',R[[X_1,...,X_m]]).$$

Man kann also, ohne die uns interessierenden Faktorringe zu verändern, von $R[X_1,...,X_m]$ zu $R[[X_1,...,X_m]]$ übergehen und die Ideale entsprechend vervollständigen.

Beachten wir nun, daß die betrachteten Anfangsformenideale von Monomen erzeugt werden, sowie die obige Aussage, so können wir den ersten Schritt anwenden:

$$l(gr_F(R[[X_1,...,X_m]])/gr_F(J',R[[X_1,...,X_m]])$$
$$\leqslant d\bullet\ l(gr_F(R[[X_1,...,X_m]])/gr_F(J,R[[X_1,...,X_m]])$$
$$= d\bullet\ l(gr_F(B))$$
$$\leqslant d\bullet\ l(B)$$

Wir haben $l(gr_F(B')) \leqslant d\bullet\ l(B)$ erhalten. Aufgrund der Konstruktion von F gilt erst recht für alle $M \in \mathbb{N}$

$$l(B'/(\bar{X}_1,...,\bar{X}_m)^M) \leqslant d\bullet l(B),$$

wobei $\bar{X}_1,...,\bar{X}_m$ die kanonischen Bilder von $X_1,...,X_m$ in B' seien. Bezeichnen wir mit n' das maximale Ideal in B', so folgt

$$l(B'/n'^M) \leqslant d\bullet\ l(B),$$

so daß die Folge der Potenzen von n' stationär wird, damit B' artinsch ist und

$$l(B') \leqslant d\bullet\ l(B)$$

gilt.

Q.E.D.

(3.5) FOLGERUNG

Es seien (R,M) ein lokaler Ring und $X_1,...,X_m$ Unbestimmte. Wir betrachten den Faktorring

$$B := R[[X_1,...,X_m]]/(I,r_1X_1^{\alpha_{11}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{1m}},...,r_lX_1^{\alpha_{l1}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{lm}}),$$

wobei I ein beliebiges Ideal in $R[[X_1,...,X_m]]$ und $r_iX_1^{\alpha_{i1}}\bullet...\bullet X_m^{\alpha_{im}}$ Monome mit Koeffizienten $r_i \in R$ sind. Mit gewissen Zahlen $d_1,...,d_m \in \mathbb{N}$ sei

$$B' := R[[X_1,...,X_m]]/(I,r_1X_1^{d_1\alpha_{11}}\bullet...\bullet X_m^{d_m\alpha_{1m}},...,r_lX_1^{d_1\alpha_{l1}}\bullet...\bullet X_m^{d_m\alpha_{lm}}).$$

Ist dann B artinsch, so gilt

$l(B')\leqslant d_1\cdot\ldots\cdot d_m\cdot l(B)$.

B e w e i s: Man wende Lemma (3.4) m mal an.

Q.E.D.

(3.6) SATZ

Es sei $R_0:= L[[X_1,\ldots,X_n]]$ und $B_0:= R_0/I_0$. Hierbei seien L ein Körper, $X_1,\ldots,X_n$ Unbestimmte und I_0 ein Ideal in R_0 derart, daß $B_0= R_0/I_0$ artinsch ist.

B_0 habe mit einer in $(X_1,\ldots,X_n)$ monomialen Filtration F auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Die Zahlen $d_1,\ldots,d_n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ seien so gewählt, daß

$$F^1\supseteq (X_1^{d_1},\ldots,X_n^{d_n}).$$

zutrifft.

Dann gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ mit der Faser B_0 für die Hilbertreihen bzw. Multiplizitäten (im Sinne kanonischer Filtrationen)

$$H_B^1\geqslant H_A^1\cdot \frac{l(B_0/F^1B_0)}{d_1\cdot\ldots\cdot d_n} \text{ und}$$

$$e(B)\geqslant e(A)\cdot \frac{l(B_0/\bigcap_{d\in\mathbb{N}}F^dB_0)}{d_1\cdot\ldots\cdot d_n}.$$

Ist speziell $l(B_0/F^1B_0)= d_1\cdot\ldots\cdot d_n$ (">" ist hier offenbar nicht möglich), so gilt

$$H_B^1\geqslant H_A^1\ ,$$

ist $l(B_0/\bigcap_{d\in\mathbb{N}}F^dB_0)\geqslant d_1\cdot\ldots\cdot d_n$, so gilt

$$e(B)\geqslant e(A).$$

B e w e i s: Sei $f: (A,m)\to (B,n)$ ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Ringe mit der Faser B_0. Wir können o.B.d.A. annehmen, A und B seien vollständig (im Sinne kanonischer Filtrationen).

$y_1,\ldots,y_m\in m$ seien Erzeugende des maximalen Ideals m in A. $x_1,\ldots,x_n$ seien Anhebungen der (kanonischen) Bilder von $X_1,\ldots,X_n$, $\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n\in B_0= B/mB$, zu Elementen aus $n\subseteq B$. Dann gilt $(x_1,\ldots,x_n)+ mB= n$, also $(x_1,\ldots,x_n,f(y_1),\ldots,f(y_m))= n$.

Mit Hilfe der Theorie der Cohenringe sieht man, es gibt ein kommutatives Diagramm lokaler Homomorphismen.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f\quad} & B \\ \uparrow{\scriptstyle p_A} & & \uparrow{\scriptstyle p_B} \\ C_A[[Y_1,\ldots,Y_m]] & \xrightarrow{\quad q\quad} & C_B[[Y_1,\ldots,Y_m,X_1,\ldots,X_n]] \end{array}$$

Dabei seien C_A und C_B Cohenringe, $Y_1,\ldots,Y_m$ und $X_1,\ldots,X_n$ Unbestimmte. Für die Homomorphismen gelte $q(Y_i)= Y_i$, $p_A(Y_i)= y_i$, $p_B(Y_i)= f(y_i)$ und $p_B(X_j)= x_j$, insbesondere sind p_A und p_B surjektiv. A und B können so identifiziert werden mit Faktorringen von $C_A[[Y_1,\dots,Y_m]]$ bzw. $C_B[[Y_1,\dots,Y_m,X_1,\dots,X_n]]$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ \| & & \| \\ C_A[[Y_1,\dots,Y_m]]/I_A & \xrightarrow{\quad g \quad} & C_B[[Y_1,\dots,Y_m,X_1,\dots,X_n]]/I_B \end{array} .$$

Dabei bezeichnen I_A und I_B die Kerne von p_A bzw. p_B. Der Homomorphismus g wird durch q induziert.

Die Filtration F auf $L[[X_1,\dots,X_n]]$ definiere bezüglich $(X_1,\dots,X_n)$ die filtrierende Familie $E= (E_d)_{d\in\mathbb{N}}$ mit $E_d\subseteq\mathbb{N}^n$ für alle d. Nach Voraussetzung gilt $d_i\bullet e_i\in E_1$ für alle i, wobei e_i den i- ten Einheitsvektor bezeichnet.

$E^A=(E^A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ mit $E^A_d\subseteq\mathbb{N}^m$ für alle d sei die filtrierende Familie mit $E^A_d := \{(a_1,\dots,a_m)\in \mathbb{N}^m : a_1+\dots+a_m\geqslant d\}$.

Die durch $(y_1,\dots,y_m)$ definierte E^A- Filtration F_A auf A ist dann gerade die kanonische.

Weiter sei die filtrierende Familie $E^B := (E^B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ mit $E^B_d\subseteq\mathbb{N}^{m+n}$ für alle d gegeben durch

$$(a_1,\dots,a_m,a'_1,\dots,a'_n)\in E^B_d \Leftrightarrow \exists i,j\in\mathbb{N}:\ (a_1,\dots,a_m)\in E^A_i,\ (a'_1,\dots,a'_n)\in E_j,\ i+j\geqslant d .$$

F_B sei die durch $(y_1,\dots,y_m,x_1,\dots,x_n)$ definierte E^B- Filtration auf B.

Der Homomorphismus $f: A\to B$ filtrierter lokaler Ringe ist damit eine Deformation von $(B_0,\overline{X},E)$ (vgl. Definition (2.5)), also laut Voraussetzung tangential flach. Dies bedeutet für alle $l\in\mathbb{N}$ nach Satz (1.8.ii)

$$H^1_{(B,F_B)}(l)= \sum_{i=0}^{l} H^1_A(l-i)\bullet H^0_{(B_0,F_{B_0})}(i) .$$

Hierbei ist H^1_A die Hilbertreihe von A mit der kanonischen Filtration, bei $H^1_{(B,F_B)}$ und $H^0_{(B_0,F_{B_0})}$ ist die Filtration in der Bezeichnung angedeutet, F_{B_0} sei die durch $(\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_n)$ definierte E- Filtration auf B_0.

Untersuchen wir nun $H^1_{(B,F_B)}$. Nach Konstruktion gilt

$(\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_m,x_1^{d_1},\dots,x_n^{d_n})\subseteq F^1_B$, also

$(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_m,x_1^{d_1},\dots,x_n^{d_n})^d \subseteq F_B^d$

für alle $d\in\mathbb{N}$, wenn wir $\bar{y}_i := f(y_i)$ setzen. Mit Hilfe von Folgerung (3.5) ergibt sich für alle $l\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H^1_{(B,F_B)}(l) &= l(B/F_B^{l+1}) \\ &\leqslant l(B/(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_m,x_1^{d_1},\dots,x_n^{d_n})^{l+1}) \\ &\leqslant d_1\bullet\dots\bullet d_n\bullet\, l(B/(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_m,x_1,\dots,x_n)^{l+1}) \\ &= d_1\bullet\dots\bullet d_n\bullet\, l(B/n^{l+1}) \\ &= d_1\bullet\dots\bullet d_n\bullet\, H^1_B(l), \end{aligned}$$

so daß wir

$$d_1\bullet\dots\bullet d_n\bullet H^1_B(l) \geqslant \sum_{i=0}^{l} H^1_A(l-i)\bullet H^0_{(B_0,F_{B_0})}(i) \qquad (*)$$

erhalten.

Betrachtet man auf der rechten Seite nur den Summanden $i=0$, so erhält man

$$d_1\bullet\dots\bullet d_n\bullet H^1_B(l) \geqslant H^1_A(l)\bullet\, l(B_0/F^1B_0),$$

also die erste Behauptung.

Für große l stehen auf beiden Seiten von $(*)$ Polynome vom Grade $q:=\dim B$ $(=\dim A)$. Die führenden Koeffizienten sind, auf der rechten Seite $l(B_0/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^dB_0)\circ \frac{e(A)}{q!}$ und auf der linken Seite $d_1\bullet\dots\bullet d_n\bullet \frac{e(B)}{q!}$. Es ergibt sich

$$d_1\bullet\dots\bullet d_n\bullet \frac{e(B)}{q!} \geqslant l(B_0/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} F^dB_0),$$

also die zweite Behauptung.

Die spezielleren Aussagen sind trivial.

Q.E.D.

(3.7) BEISPIEL

Es seien $R_0 := L[[X,Y,Z]]$ und $B_0 := R_0/I_0$ mit
$I_0 := (X^2,XY,Y^2,XZ^2,Z^3,YZ^2)$.
Dann hat B_0 mit der (X,Y,Z^2)-adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ mit der Faser B_0
$H^1_B \geqslant H^1_A$ und $e(B)\geqslant \frac{7}{2}e(A)$.

B e w e i s: Man rechnet unschwer $l(B_0)=7$ und $l(B_0/J_0B_0)=2$ nach, wobei $J_0 := (X,Y,Z^2)\subseteq R[[X,Y,Z]]$ gesetzt sei. Die J_0B_0-adische Filtration auf B_0 ist separiert. Nach dem obigen Satz (3.6) ist zu zeigen, daß B_0 mit der J_0-adischen Filtration auf R_0 tatsächlich nur tangential flache Deformationen hat. Dazu werden wir $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ nachrechnen.

Es gilt $gr(R_0) = L[X,Y,Z]$ als L- Vektorraum, für die Multiplikation jedoch

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1} \bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2} := \begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls } \left\{\frac{c_1}{2}\right\} + \left\{\frac{c_2}{2}\right\} < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. z.B. (1.25)). $gr(I_0,R_0)$ wird von allen Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache von X^2, XY, Y^2, XZ^2, Z^3 oder YZ^2 sind. Um zu Vielfachen im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen zu können, sind hierbei die Monome $X^aY^bZ^c$ mit ungeradem c durch das Paar, bestehend aus $X^aY^bZ^c$ und $X^aY^bZ^{c+1}$, zu ersetzen. $gr(I_0,R_0)$ wird also von $X^2, XY, Y^2, XZ^2, Z^3, Z^4, YZ^2 \in gr(R_0)$ erzeugt. Wir erhalten folgende Tabelle.

Standardbasis	X^2	XY	Y^2	XZ^2	Z^3	Z^4	YZ^2
Grade	2	2	2	2	1	2	2
einige Syzygien	Y	$-X$					
	Z^2			$-X$			
		Y	$-X$				
		Z^2					$-X$
				Z^2		$-X$	
$N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)$	A_1+A_2Z	B_1+B_2Z	C_1+C_2Z	D_1+D_2Z	0	E_1+E_2Z	F_1+F_2Z
	0	0	0	0	0	0	0

Man beachte, wir haben den allgemeinen Typ der homogenen Elemente in $gr(R_0)$ vom Grade 0 angesetzt. Die Notwendigkeit der Nullen ergibt sich unmittelbar aus den angegebenen Syzygien.

Wir haben also $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ erhalten.

Q.E.D.

(3.8) BEISPIEL

Es seien $R_0 := L[[X,Y,Z]]$ und $B_0 := R_0/I_0$ mit $I_0 := (X^2, XY, Y^2, XZ^2, Z^3)$.
Dann hat B_0 mit der (X,Y,Z^2)- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m) \to (B,n)$ mit der Faser B_0
$H^1_B \geqslant H^1_A$ und $e(B) \geqslant 4 \bullet e(A)$.

B e w e i s: Man rechnet unschwer $l(B_0) = 8$ und $l(B_0/J_0B_0) = 2$ nach, wobei $J_0 := (X,Y,Z^2) \subseteq R[[X,Y,Z]]$ gesetzt sei. Die J_0B_0- adische

Filtration auf B_0 ist separiert. Nach dem obigen Satz (3.6) ist zu zeigen, daß B_0 mit der J_0- adischen Filtration auf R_0 tatsächlich nur tangential flache Deformationen hat. Wir werden wiederum $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ nachrechnen.

Es gilt $gr(R_0) = L[X,Y,Z]$ als L- Vektorraum, für die Multiplikation jedoch

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1} \bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2} := \begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls } \left\{\frac{c_1}{2}\right\} + \left\{\frac{c_2}{2}\right\} < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wie oben. $gr(I_0,R_0)$ wird von allen Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache von X^2, XY, Y^2, XZ^2 oder Z^3 sind. Um zu Vielfachen im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen zu können, sind hierbei erneut die Monome $X^aY^bZ^c$ mit ungeradem c durch das Paar, bestehend aus $X^aY^bZ^c$ und $X^aY^bZ^{c+1}$, zu ersetzen. $gr(I_0,R_0)$ wird also von $X^2, XY, Y^2, XZ^2, Z^3, Z^4 \in gr(R_0)$ erzeugt. Wir erhalten folgende Tabelle.

Standardbasis	X^2	XY	Y^2	XZ^2	Z^3	Z^4
Grade	2	2	2	2	1	2
einige Syzygien	Y	$-X$				
	Z^2			$-X$		
		Y	$-X$			
				Z^2		$-X$
$N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)$	A_1+A_2Z	B_1+B_2Z	C_1+C_2Z	D_1+D_2Z	0	E_1+E_2Z
	0	0	0	0	0	0

Wir haben wiederum den allgemeinen Typ der homogenen Elemente in $gr(R_0)$ vom Grade 0 angesetzt. Die Notwendigkeit der Nullen ergibt sich unmittelbar aus den angegebenen Syzygien.

Wir haben also $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ erhalten.

Q.E.D.

(3.9) BEISPIEL

Es seien $R_0 := L[[X,Y,Z]]$ und $B_0 := R_0/I_0$ mit $I_0 := (X^3, XZ, Y^3, Y^2Z, Z^2)$.
Dann hat B_0 mit der (X^2,XY,Y^2,Z)- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m) \rightarrow (B,n)$ mit der Faser B_0
$H_B^1 \geqslant \frac{3}{4} \bullet H_A^1$ und $e(B) \geqslant \frac{11}{4} \bullet e(A)$.

B e w e i s: Man rechnet unschwer $l(B_0) = 11$ und $l(B_0/J_0B_0) = 3$ nach, wobei $J_0 := (X^2,XY,Y^2,Z) \subseteq R[[X,Y,Z]]$ gesetzt sei. Die J_0B_0- adische

Filtration auf B_0 ist separiert. Nach Satz (3.6) ist zu zeigen, daß B_0 mit der J_0- adischen Filtration F auf R_0 nur tangential flache Deformationen hat. (Wir bemerken, daß wir hier $F^1 \supseteq (X^2, Y^2, Z)$ nutzen.)

Es gilt $gr(R_0) = L[X,Y,Z]$ als L- Vektorraum. Für die Multiplikation erhalten wir hier

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1} \bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2} := \begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls } (*) \text{ gilt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\left\{\frac{a_1+b_1}{2}\right\}+\left\{\frac{a_2+b_2}{2}\right\}<1 \ , \qquad (*)$$

denn F stimmt mit der durch (X,Y,Z) definierten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$- Filtration überein, das heißt es gilt $ord_F(X^aY^bZ^c) = [\frac{a+b}{2}] + c$.

$gr(I_0, R_0)$ wird von allen Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache von X^3, XZ, Y^3, Y^2Z oder Z^2 sind. Um zu Vielfachen im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen zu können, sind hierbei die Monome $X^aY^bZ^c$ mit ungeradem a+b durch das Tripel, bestehend aus $X^aY^bZ^c$, $X^{a+1}Y^bZ^c$ und $X^aY^{b+1}Z^c$ zu ersetzen. Wir erhalten

Erzeugendes	X^3	XZ	Y^3	Y^2Z	Z^2
zusätzliche Erzeugende	X^4 X^3Y	X^2Z XYZ	XY^3 Y^4	keine	keine

I_0 hat also eine Standardbasis aus 11 Elementen. Wir erhalten folgende Tabelle.

Standardbasis	X^3	XZ	Y^3	X^4	X^3Y	X^2Z	XY^3	XYZ	Y^4	Y^2Z	Z^2	
Grade	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	
lfd. Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
einige Syzygien						XY		$-X^2$				(1)
								XY		$-X^2$		(2)
										Z	$-Y^2$	(3)
						$-Z$					X^2	(4)
				XY	$-X^2$							(5)
				Y^2	$-XY$							(5')
							$-Y^2$		XY			(6)
							$-XY$		X^2			(6')
					Z	$-XY$						(7)
									Z	$-Y^2$		(8)
$N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Die Elemente mit Nr. 1, 2, 3 haben den Grad 1, so daß dort die

Nullen trivialerweise stehen. Bei den Elementen vom Grad 2 kämen Linearkombinationen vom Typ $A_0+A_1X+A_2Y$ in Frage. (Die folgenden Überlegungen benutzen XY, X^2Y, XY^2, $YZ \notin gr(I_0,R_0)$.)
Die Syzygien (1), (2) liefern die Notwendigkeit der 0 bei Nr. 6; (2), (3) die Notwendigkeit der 0 bei Nr. 8. Ferner betrachtet man (2), (8) für Nr. 10; (3), (4) für Nr. 11; (5), (5') und (7) für Nr. 4, 5 sowie (6), (6') und (8) für Nr. 7, 9.
Wir haben also $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)=0$ erhalten.

Q.E.D.

(3.10) BEISPIEL
Es seien $R_0:=L[[X,Y,Z]]$ und $B_0:=R_0/I_0$ mit
$I_0:=(XZ,Z^2,X^3,XY^2,Y^2Z,Y^3)$.
Dann hat B_0 mit der (X^2,XY,Y^2,Z)- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ mit der Faser B_0
$H^1_B \geqslant \frac{3}{4}\bullet H^1_A$ und $e(B)\geqslant \frac{9}{4}\bullet e(A)$.
B e w e i s: Man rechnet unschwer $l(B_0)=9$ und $l(B_0/J_0B_0)=3$ nach, wobei $J_0:=(X^2,XY,Y^2,Z)\subseteq R[[X,Y,Z]]$ gesetzt sei. Die J_0B_0- adische Filtration auf B_0 ist separiert. Nach Satz (3.6) ist zu zeigen, daß B_0 mit der J_0- adischen Filtration F auf R_0 nur tangential flache Deformationen hat. (Wir nutzen wiederum $F^1\supseteq(X^2,Y^2,Z)$.)
Es gilt $gr(R_0)=L[X,Y,Z]$ als L- Vektorraum, aber für die Multiplikation

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}\bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}:=\begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls } (*) \text{ gilt}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

mit

$$\left\{\frac{a_1+b_1}{2}\right\}+\left\{\frac{a_2+b_2}{2}\right\}<1 , \qquad (*)$$

wie oben. $gr(I_0,R_0)$ wird von allen Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache von XZ, Z^2, X^3, XY^2, Y^2Z oder Y^3 sind. Um zu Vielfachen im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen zu können, müssen wir wie oben zusätzliche Erzeugende hinzufügen.

Erzeugendes	XZ	Z^2	X^3	XY^2	Y^2Z	Y^3
zusätzliche Erzeugende	X^2Z XYZ	keine	X^4 X^3Y	X^2Y^2 XY^3	keine	XY^3 Y^4

XY^3 ist doppelt entstanden. I_0 hat also eine Standardbasis aus 13 Elementen. Wir erhalten folgende Tabelle.

Standardbasis	XZ	X^3	XY^2	Y^3	X^2Z	XYZ	Y^2Z	X^4	X^3Y	X^2Y^2	XY^3	Y^4	Z^2
Grade	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
lfd. Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
einige Syzygien					Y^2	$-XY$							
					XY	$-X^2$							
						Y^2	$-XY$						
						XY	$-X^2$						
								Y^2	$-XY$				
								XY	$-X^2$				
									Y^2	$-XY$			
									XY	$-X^2$			
										Y^2	$-XY$		
										XY	$-X^2$		
											Y^2	$-XY$	
											XY	$-X^2$	
(1)					X^2			$-Z$					
(2)						X^2			$-Z$				
(3)					Z								$-X^2$
(4)						Z							$-XY$
$N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Elemente mit Nr. 1, 2, 3, 4 haben den Grad 1, so daß dort die Nullen trivialerweise stehen. Bei den Elementen vom Grad 2 kämen Linearkombinationen vom Typ $A_0+ A_1X+ A_2Y$ in Frage. Die Syzygien (1) und (2) liefern, daß bei Nr. 5, 6, 8, 9 die Koeffizienten bei Y verschwinden müssen (YZ, $X^2Y \notin gr(I_0,R_0)$). Die Paare von Syzygien $(Y^2,-XY)$, $(XY,-X^2)$ lassen für den Normalenmodul nur (X,Y), $(Y,0)$ oder deren Linearkombinationen, evtl. $(0,0)$ zu. (Dies benutzt wesentlich $X^2Y \notin gr(I_0,R_0)$.) Insgesamt erhalten wir die Notwendigkeit der Nullen bei Nr. 5, 6, 7; 8, 9, 10, 11, 12. Die Syzygien (3) und (4) liefern, daß auch bei Nr. 13 eine Null stehen muß. (X^2, $X^2Y \notin gr(I_0,R_0)$)

Wir haben also $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)= 0$ erhalten.

Q.E.D.

(3.11) BEISPIEL

Es seien $R_0:= L[[X,Y,Z]]$ und $B_0:= R_0/I_0$ mit
$I_0:= (Z^2,X^3,X^2Y,XYZ,Y^2Z,Y^3)$.
Dann hat B_0 mit der (X^2,XY,Y^2,Z)- adischen Filtration auf R_0 nur

tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ mit der Faser B_0

$H^1_B \geqslant \frac{3}{4}\bullet H^1_A$ und $e(B)\geqslant \frac{11}{4}\bullet e(A)$.

B e w e i s: Man rechnet unschwer $l(B_0)= 11$ und $l(B_0/J_0B_0)= 3$ nach, wobei $J_0:= (X^2,XY,Y^2,Z)\subseteq R[[X,Y,Z]]$ gesetzt sei. Die J_0B_0- adische Filtration auf B_0 ist separiert. Nach Satz (3.6) ist zu zeigen, daß B_0 mit der J_0- adischen Filtration F auf R_0 nur tangential flache Deformationen hat. (Wir nutzen wiederum $F^1\supseteq (X^2,Y^2,Z)$.)

Es gilt $gr(R_0)= L[X,Y,Z]$ als L- Vektorraum, aber für die Multiplikation

$$X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}\bullet X^{a_2}Y^{b_2}Z^{c_2}:=\begin{cases} X^{a_1+a_2}Y^{b_1+b_2}Z^{c_1+c_2} & \text{falls } (*) \text{ gilt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\left\{\frac{a_1+b_1}{2}\right\}+\left\{\frac{a_2+b_2}{2}\right\}<1 \ , \qquad (*)$$

wie oben. $gr(I_0,R_0)$ wird von allen Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache von Z^2, X^3, X^2Y, XYZ, Y^2Z oder Y^3 sind. Um zu Vielfachen im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen zu können, müssen wir zusätzliche Erzeugende hinzufügen.

Erzeugendes	Z^2	X^3	X^2Y	XYZ	Y^2Z	Y^3
zusätzliche Erzeugende	keine	X^4 X^3Y	X^3Y X^2Y^2	keine	keine	XY^3 Y^4

X^3Y ist doppelt entstanden. I_0 hat also eine Standardbasis aus 11 Elementen. Wir erhalten folgende Tabelle.

Standardbasis	X^3	X^2Y	Y^3	XYZ	Y^2Z	X^4	X^3Y	X^2Y^2	XY^3	Y^4	Z^2
Grade	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
lfd. Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
einige Syzygien						Y^2	$-XY$				
						XY	$-X^2$				
							Y^2	$-XY$			
							XY	$-X^2$			
								Y^2	$-XY$		
								XY	$-X^2$		
									Y^2	$-XY$	
									XY	$-X^2$	
(1)					Z						$-Y^2$
(2)				Z							$-XY$
(3)					Y^2					$-Z$	

(4)					XY				$-Z$		
$N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Elemente mit Nr. 1, 2, 3 haben den Grad 1, so daß dort die Nullen trivialerweise stehen. Bei den Elementen vom Grad 2 kämen Linearkombinationen vom Typ $A_0+ A_1X+ A_2Y$ in Frage. Die Syzygien (3) und (4) liefern, daß bei Nr. 9, 10 die Koeffizienten bei X verschwinden müssen ($XZ, YZ\notin gr(I_0,R_0)$). Die Paare von Syzygien $(Y^2,-XY)$, $(XY,-X^2)$ lassen für den Normalenmodul nur (X,Y), $(0,X)$ und Linearkombinationen, evtl. $(0,0)$ zu. (Dies benutzt wesentlich $XY^2\notin gr(I_0,R_0)$.) Insgesamt erhalten wir die Notwendigkeit der Nullen bei Nr. 6, 7, 8, 9, 10. Die Syzygie (1) liefert nun die Notwendigkeit der Null bei Nr. 5 ($XZ, YZ\notin gr(I_0,R_0)$) und das Verschwinden des Koeffizienten vor X bei Nr. 11 ($XY^2\notin gr(I_0,R_0)$). Mittels Syzygie (2) ergibt sich dann die Null bei Nr. 4 ($XZ, YZ\notin gr(I_0,R_0)$) und Nr. 11 ($XY^2\notin gr(I_0,R_0)$).

Wir haben also $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)= 0$ erhalten.

Q.E.D.

(3.12) BEISPIEL

Es seien $R_0:= L[[X_1,...,X_n]]$ und $B_0:= R_0/I_0$. Hierbei werde I_0 erzeugt von allen Monomen vom Grade δ_1 in $X_1,...,X_{n_1}$, allen Monomen vom Grade δ_2 in $X_{n_1+1},...,X_{n_2},...,$ allen Monomen vom Grade δ_l in $X_{n_{l-1}+1},...,X_{n_l}$ sowie von

$$X_{n_1+1}^{d_{n_1+1}},...,X_n^{d_n}.$$

(Es werde $1< n_1$, $n_1+1< n_2,...,$ $n_{l-1}+1< n_l$ vorausgesetzt.)

Dann hat B_0 mit der $(X_1,...,X_{n_1},X_{n_1+1}^{d_{n_1+1}},...,X_n^{d_n})$- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f: (A,m)\to(B,n)$ lokaler Ringe mit der Faser B_0

$$H_B^1\geqslant H_A^1 \text{ und } e(B)\geqslant e(A) .$$

B e w e i s: Es sei

$$J_0:= (X_1,...,X_{n_1},X_{n_1+1}^{d_{n_1+1}},...,X_n^{d_n})$$

gesetzt. Dann gilt

$$B_0/J_0B_0 \cong L[[X_1,\dots,X_n]]/(X_1,\dots,X_{n_1},X_{n_1+1}^{d_{n_1+1}},\dots,X_n^{d_n}) .$$

Die Länge dieses Ringes stimmt mit seiner Dimension als L- Vektorraum überein. Als solcher wird B_0/J_0B_0 jedoch gerade von den Monomen

$$X_{n_1+1}^{a_{n_1+1}}\bullet\dots\bullet X_n^{a_n} \quad \text{mit } 0\leqslant a_i\leqslant d_i-1 \text{ für } i\in\{n_1+1,\dots,n\}$$

aufgespannt. Es gilt also $l(B_0/J_0B_0)= d_{n_1+1}\bullet\dots\bullet d_n$ und $l(B_0/\bigcap_{d\in\mathbb{N}} J_0^dB_0)\geqslant d_{n_1+1}\bullet\dots\bullet d_n$.

Es bleibt zu zeigen, daß B_0 mit der J_0- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen hat. Wir werden $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)= 0$ nachrechnen.

Als L- Vektorraum gilt $gr(R_0)= L[X_1,\dots,X_n]$. Es bleibt die Multiplikation zu betrachten. Es gilt (wenn wir eine Multiindexschreibweise benutzen)

$$X^\alpha\bullet X^\beta= \begin{cases} X^{\alpha+\beta} & \text{falls } ord(X^{\alpha+\beta})= ord(X^\alpha)+ ord(X^\beta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (*)$$

Wegen

$$ord(X^a)= a_1+\dots+a_{n_1}+\left[\frac{a_{n_1+1}}{d_{n_1+1}}\right]+\dots+\left[\frac{a_n}{d_n}\right]$$

vereinfacht sich (*) zu

$$\left\{\frac{\alpha_{n_1+1}}{d_{n_1+1}}\right\}+\left\{\frac{\beta_{n_1+1}}{d_{n_1+1}}\right\}< 1 \wedge\dots\wedge\left\{\frac{\alpha_n}{d_n}\right\}+\left\{\frac{\beta_n}{d_n}\right\}< 1 . \qquad (+)$$

$gr(I_0,R_0)$ wird von den Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache der in der Behauptung angegebenen Erzeugenden von I_0 sind. Beim Auftreten solcher Faktoren gilt jedoch offenbar (+) immer, so daß man zur Multiplikation im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen kann. Wir haben es also bereits mit einem Erzeugendensystem von $gr(I_0,R_0)$ zu tun.

Wir erhalten folgende Tabelle.

Standardbasis	$X_1^{\delta_1}$	$X_1^{\delta_1-1}X_2$	... $X_{n_1+1}^{d_{n_1+1}}$ ...
Grade	δ_1	δ_1	1
Syzygien	X_2 ...	$-X_1$	
Normalenmodul (Grad <-1)	$\sum_{(c_i)} a_{c_1,\dots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\dots\bullet X_n^{c_n}$	$\sum_{(c_i)} b_{c_1,\dots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\dots\bullet X_n^{c_n}$	0

Hierbei wird jeweils über alle n- Tupel $(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{N}^n$ mit

$c_1+\ldots+c_{n_1}<\delta_1,\ \ldots,\ c_{n_{l-1}+1}+\ldots+c_{n_l}<\delta_l;\ c_{n_l+1}<d_{n_l+1},\ \ldots,\ c_n<d_n$ und

$c_1+\ldots+c_{n_1}\leqslant\delta_1-2$

summiert. Wir haben die allgemeine Form der Elemente von $gr(R_0)$ vom Grade höchstens δ_1-2 angesetzt. Da

$g\in Hom_{gr(R_0)}(gr(I_0,R_0),gr(R_0)/gr(I_0,R_0))$

gelten soll, haben wir Monome aus $gr(I_0,R_0)$ als Summanden nicht zugelassen.

Die Faktoren X_2 bzw. X_1 sichern, daß (+) erfüllt ist. Es muß gelten

$$X_2\bullet(\sum_{(c_i)} a_{c_1,\ldots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\ldots\bullet X_n^{c_n})-X_1\bullet(\sum_{(c_i)} b_{c_1,\ldots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\ldots\bullet X_n^{c_n})$$

$\in gr(I_0,R_0)$.

Die entstehenden Produktmonome liegen nicht in $gr(I_0,R_0)$. Man beachte hierbei, daß $c_1+\ldots+c_{n_1}\leqslant\delta_1-2$ liefert:

$1+(c_1+\ldots c_{n_1})\leqslant\delta_1-1<\delta_1$.

Da $gr(I_0,R_0)$ aber von Monomen erzeugt wird, muß die obige Differenz verschwinden:

$$\sum_{(c_i)} b_{c_1,\ldots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\ldots\bullet X_n^{c_n}=\frac{X_2}{X_1}\bullet\sum_{(c_i)} a_{c_1,\ldots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\ldots\bullet X_n^{c_n}$$

Das Polynom bei $X_2^{\delta_1}$ sei $\sum_{(c_i)} e_{c_1,\ldots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\ldots\bullet X_n^{c_n}$. Induktiv erhält man

$$\sum_{(c_i)} e_{c_1,\ldots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\ldots\bullet X_n^{c_n}=\frac{X_2^{\delta_1}}{X_1^{\delta_1}}\bullet\sum_{(c_i)} a_{c_1,\ldots,c_n}X_1^{c_1}\bullet\ldots\bullet X_n^{c_n}.$$

Wegen $c_1+\ldots+c_{n_1}<\delta_1$ ist dies aber nur möglich, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Es gilt also $g(X_1^{\delta_1})=0$. Die Syzygien liefern dies schrittweise für alle Monome in $X_1,\ldots,X_{n_1}$ vom Grade δ_1 mit dem Faktor $X_1^{\delta_1-1}, X_1^{\delta_1-2}, \ldots$. Für alle weiteren Elemente der Standardbasis ergibt sich die Notwendigkeit der Nullen analog. Wir haben $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)=0$ erhalten.

Q.E.D.

(3.13) BEMERKUNG

Es fällt auf, daß in nahezu allen unserer Beispiele lokale Ringe $B_0:=R_0/I_0$ mit $R_0:=L[[X_1,\ldots,X_n]]$ untersucht werden, bei denen I_0 von Monomen erzeugt wird. Dies liegt daran, daß bei anderen Beispielen die uns interessierenden Rechnungen häufig ausgesprochen kompliziert werden. Dies betrifft meist schon die Suche nach einem

Erzeugendensystem von $gr(I_0,R_0)$.

Wir kommen daher nun zu einem Verfahren, welches es gestattet, die Frage ob ein gegebener lokaler Ring $B_0 = R_0/I_0$ mit einer gewissen monomialen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen hat, auf die Untersuchung eines anderen lokalen Ringes $B'_0 := R_0/I'_0$ zurückzuführen, wobei I'_0 von Monomen erzeugt wird. Die Idee dazu ist im wesentlichen in Lemma (3.16) enthalten. Wir hatten ursprünglich die Absicht, an dessen Stelle das Lemma (4.7) aus der Arbeit [He-1] zu zitieren. Dieses hat sich aber als fehlerhaft erwiesen. Zunächst müssen wir den Begriff des filtrierten Moduls verallgemeinern.

(3.14) DEFINITIONEN

Sei $\ll$ eine Ordnungsrelation auf der Gruppe $(\mathbb{Z}^n,+)$, die mit der Gruppenoperation verträglich ist und auf $\mathbb{N}^n$ eine Wohlordnung induziert. Wir nehmen ferner an, das Element $(0,\ldots,0)$ besitze in $\mathbb{Z}^n$ einen unmittelbaren Nachfolger.

Die Gruppenoperation liefert zu jedem Element $d\in\mathbb{Z}^n$ einen unmittelbaren Nachfolger, den wir d^μ nennen. Man beachte, daß im Falle $d\in\mathbb{N}^n$ nicht notwendig $d^\mu\in \mathbb{N}^n$ gelten muß, d^μ und d^ν also voneinander verschieden sein können.

Seien nun A ein Ring, der mit einer n- Filtration F_A versehen ist, und M ein A- Modul. Unter einer *Multifiltration* oder n- *Filtration* F_M auf M verstehen wir eine Familie $(F_M^d)_{d\in\mathbb{Z}^n}$ von Teilmoduln von M mit

(a) $F_M^d \supseteq F_M^e$ falls $d\ll e$; $d,e\in \mathbb{Z}^n$,

(b) $F_A^{d_1}\cdot F_M^{d_2} \subseteq F_M^{d_1+d_2}$ für beliebige $d_1\in\mathbb{N}^n$, $d_2\in\mathbb{Z}^n$.

Sei der A- Modul M mit einer Multifiltration F_M versehen. Dann wird die direkte Summe

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^n} F_M^d/F_M^{d^\mu}$$

mit der Multiplikation mit Elementen aus $gr_{F_A}(A)$

$$(a \bmod F_A^{d^\mu})\cdot(m \bmod F_M^{d'^\mu}) := (am \bmod F_M^{(d+d')^\mu})$$

für $a\in F_A^d$, $m\in F_M^{d'}$ versehen, zu M *assoziierter multigraduierter* gr(A)-*Modul* genannt und mit $gr_{F_M}(M)$ oder $gr(M)$ bezeichnet.

(3.15) BEMERKUNGEN

Es fällt auf, daß wir bei der Definition von $gr_F(A)$ und $gr_F(M)$

verschiedene Nachfolgerbegriffe benutzt haben. Man könnte dies vereinheitlichen, indem man völlig äquivalent

$gr_{F_A}(A)= \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} F_A^d/(F_A^e)_{d\ll e,\ d\neq e,\ e\in\mathbb{N}^n}$ und

$gr_{F_M}(M)= \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^n} F_M^d/(F_M^e)_{d\ll e,\ d\neq e,\ e\in\mathbb{Z}^n}$

definiert.

Seien A ein Ring, der mit einer n- Filtration F_A versehen ist und I ein Ideal in A. Wir fassen dann den Normalenmodul

$N_I= \mathrm{Hom}_A(I,A/I)$

stets als A- Modul, versehen mit der induzierten n- Filtration

$F_{N_I}:= (F^d_{N_I})_{d\in\mathbb{Z}^n}$ mit

$F^d_{N_I}:= \{f\in N_I\colon f(I\cap F_A^e)\subseteq F_A^{d+e}+I/I$ für alle $e\in\mathbb{N}^n\}$

auf.

Ist $A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} A(d)$ ein multigraduierter Ring und $I=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} I(d)$ ein endlich erzeugtes homogenes Ideal, so ist N_I in natürlicher Weise ein multigraduierter A- Modul, $N_I= \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^n} N_I(d)$ mit

$N_I(d)= \{f\in N_I\colon f(I(e))\subseteq A(d+e)/I(d+e)$ für alle $e\in\mathbb{N}^n\}$.

(3.16) LEMMA

$\ll$ sei eine Ordnungrelation auf der Gruppe $(\mathbb{Z}^n,+)$, die mit der Gruppenoperation verträglich ist und auf $\mathbb{N}^n$ eine Wohlordnung induziert. Jedes Element $d\in\mathbb{Z}^n$ habe einen unmittelbaren Nachfolger d^μ.

Weiter seien A ein Ring, der mit einer n- Filtration F_A versehen ist, und I ein Ideal in A. Dann ist $gr_{F_A}(A)$ ein multigraduierter Ring, den wir als noethersch voraussetzen, und $gr_{F_A}(I,A)$ ein homogenes Ideal; $gr(N_I)$ und $N_{gr_{F_A}(I,A)}$ sind multigraduierte $gr_{F_A}(A)$-Moduln.

In dieser Situation gibt es einen multigraduierten injektiven Homomorphismus vom Grade $(0,\dots,0)$

$$gr(N_I)\to N_{gr_{F_A}(I,A)}\ . \qquad (*)$$

Sei weiterhin $A= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}}A(k)$ ein noetherscher graduierter Ring und $I:= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}}I(k)$ ein homogenes Ideal. Die n- Filtration F_A sei vertäglich mit der graduierten Struktur:

$F_A^d=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}F_A^d(k)$, $F_A^d(k):= F_A^d\cap A(k)$ für alle $d\in\mathbb{N}^n$.

Dann induziert die graduierte Struktur auf A eine graduierte Struktur auf $gr_{F_A}(A)$ derart, daß $gr_{F_A}(I,A)$ ein homogenes Ideal ist. N_I, $gr(N_I)$ und $N_{gr_{F_A}(I,A)}$ sind graduierte A- bzw. $gr_{F_A}(A)$- Moduln und der Homomorphismus (*) ist graduiert vom Grade 0.

Wir nehmen nun speziell an, die wohlgeordnete Menge $(\mathbb{N}^n,\ll)$ sei sogar relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leq)$ und die n- Filtration F_A auf dem graduierten Ring A sei so beschaffen, daß für alle $k\in\mathbb{N}$ ein Multiindex $d\in\mathbb{N}^n$ mit

$$F_A^d\subseteq A(\geq k)\ (=\bigoplus_{l\geq k}A(l))$$

existiert. Wenn wir dann $N_{gr_{F_A}(I,A)}$ und N_I als graduierte Moduln bezüglich der von A kommenden graduierten Struktur betrachten, so impliziert

$$N_{gr_{F_A}(I,A)}(<-1)=0$$

die Beziehung

$$N_I(<-1)=0.$$

B e w e i s: Zunächst sei bemerkt, $gr_{F_A}(I,A)$ ist endlich erzeugt und damit $N_{gr_{F_A}(I,A)}$ tatsächlich ein multigraduierter $gr_{F_A}(A)$-Modul.

Wir wollen nun den Homomorphismus (*) konstruieren. Sei dazu $G\in gr(N_I)$ ein homogenes Element vom Grade $d\in\mathbb{Z}^n$. Wir wählen ein beliebiges

$$g\in N_I=Hom_A(I,A/I)$$

mit $g\in F_{N_I}^d$ und der Anfangsform $in(g):=(g \bmod F_{N_I}^{d^\mu})=G$. Es gilt

$$g(I\cap F_A^j)\subseteq F_A^{j+d}+I/I$$

für jedes $j\in\mathbb{N}^n$. Dies liefert $g(I\cap F_A^{j^\mu})\subseteq F_A^{j^\mu+d}+I/I=F_A^{(j+d)^\mu}+I/I$ und damit erst recht

$$g(I\cap F_A^{j^\nu})\subseteq F_A^{(j+d)^\mu}+I/I\ .$$

Also induziert g Homomorphismen

$$g(j):\ I\cap F_A^j/I\cap F_A^{j^\nu}\rightarrow F_A^{j+d}+I/F_A^{(j+d)^\mu}+I\ ,$$

die ein homogenes Element vom Grade d von $N_{gr_{F_A}(I,A)}$ definieren. Ist $g'\in N_I$ ein weiteres Element mit $g'\in F_{N_I}^d$ und der Anfangsform G, so gilt $g-g'\in F_{N_I}^{d^\mu}$ und damit $g(j)=g'(j)$ für alle j. Dies beweist, daß es eine wohldefinierte multigraduierte Abbildung vom Grade (0,...,0)

$$gr(N_I)\rightarrow N_{gr_{F_A}(I,A)}\quad ,G\mapsto\bigoplus_{j\in\mathbb{N}^n}g(j)$$

gibt. Man überprüft unschwer, sie ist ein Homomorphismus von $gr_{F_A}(A)$- Moduln.

Wir nehmen $g(j)=0$ für alle j an. Dies bedeutet

$$g(I\cap F_A^j)\subseteq F_A^{(j+d)^\mu}+I/I,$$

folglich $g\in F_N^{d^\mu}$ und $G=(g \bmod F_{N_I}^{d^\mu})=0$. Der Homomorphismus ist injektiv.

Nehmen wir nun an, A sei ein noetherscher graduierter Ring, I ein homogenes Ideal und die n- Filtration F_A verträglich mit der graduierten Struktur. Dann sind die F_A^d homogene Ideale in A, so daß $gr_{F_A}(A)$ ein graduierter Ring ist mit

$$gr_{F_A}(A)(k)=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} F_A^d(k)/F_A^{d^\nu}(k)\ .$$

Damit ist ebenso $gr_{F_A}(A/I)$ ein graduierter Ring mit den Komponenten

$$gr_{F_A}(A/I)(k)=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} F_A^d(k)+I(k)/F_A^{d^\nu}(k)+I(k)\ .$$

Die natürliche Abbildung $gr_{F_A}(A)\rightarrow gr_{F_A}(A/I)$ ist ein graduierter Homomorphismus vom Grade 0. Es ergibt sich, daß $gr_{F_A}(I,A)$ ein homogenes Ideal in $gr_{F_A}(A)$ ist mit

$$gr_{F_A}(I,A)(k)=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} I(k)\cap F_A^d(k)+F_A^{d^\nu}(k)/F_A^{d^\nu}(k)\ .$$

Weiter ist I ein endlich erzeugtes homogenes Ideal im graduierten Ring A. Damit ist N_I ein graduierter A- Modul.

$$N_I(k)=\{f\in N_I:\ f(I(j))\subseteq A(j+k)/I(j+k) \text{ für alle } j\in\mathbb{N}\}$$

Sei nun $d\in\mathbb{N}^n$ und $g\in F_{N_I}^d$ ein beliebiges Element. Dann kann man g in seine homogenen Bestandteile bezüglich der Graduierung auf N_I zerlegen. Die Verträglichkeit der Multifiltration F_A auf A mit der dortigen graduierten Struktur liefert, daß alle diese Bestandteile in $F_{N_I}^d$ liegen. Folglich ist $F_{N_I}^d$ ein homogener Teilmodul von N_I für alle $d\in\mathbb{Z}^n$. Somit ist $gr(N_I)$ ein graduierter $gr_{F_A}(A)$- Modul.

$$gr(N_I)(k)=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^n}\{(g_d \bmod F_{N_I}^{d^\mu}):\ g_d\in F_{N_I}^d,\ \forall j\in\mathbb{N}:\ g_d(I(j))\subseteq A(j+k)/I(j+k)\}$$

Schließlich ist $N_{gr_{F_A}(I,A)}$ in natürlicher Weise ein graduierter $gr_{F_A}(A)$- Modul, da $gr_{F_A}(A)$ ein graduierter Ring und $gr_{F_A}(I,A)$ ein endlich erzeugtes homogenes Ideal ist.

$$N_{gr_{F_A}(I,A)}(k)$$
$$=\{g\in N_{gr_{F_A}(I,A)}:\ \forall j\in\mathbb{N}:\ g(gr_{F_A}(I,A)(j)\subseteq gr_{F_A}(A)(j+k)/gr_{F_A}(I,A)(j+k)\}$$

Ist nun $G:=(g_d \bmod F_{N_I}^{d^\mu})_{d\in\mathbb{Z}^n}\in\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^n} F_{N_I}^d/F_{N_I}^{d^\mu}=gr(N_I)$ ein Element aus $gr(N_I)(k)$, so können wir für alle d

$$g_d(I(j)\cap F_A^l(j))\subseteq A(j+k)/I(j+k)\cap F_A^{l+d}+I/I$$

$$= F_A^{l+d}(j+k)+ I(j+k)/I(j+k)$$

annehmen. Das Bild von G unter dem Homomorphismus (*) ist somit homogen vom Grade k in $N_{gr_{F_A}(I,A)}$. In anderen Worten, der Homomorphismus (*) respektiert die graduierten Strukturen, die von jener auf A induziert werden. Er ist graduiert vom Grade 0.

Wir wenden uns nun der Situation zu, daß $(\mathbb{N}^n,\ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist und die n- Filtration F_A auf dem graduierten Ring A so beschaffen ist, daß für alle $k\in\mathbb{N}$ ein $d\in\mathbb{N}^n$ mit $F_A^d\subseteq A(\geqslant k)$ existiert.

Sei $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine (endliche) Familie von Elementen aus I, deren Anfangsformen in $gr_{F_A}(A)$ gerade das Ideal $gr_{F_A}(I,A)$ erzeugen. Wir wollen zunächst zeigen, dann existiert für jedes $x\in I\cap F_A^d$ eine Darstellung $x= \langle h,r\rangle$ mit $h= (h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A$, wobei für alle $\lambda\in\Lambda$ $d\ll ord_{F_A}(r_\lambda)+ ord_{F_A}(h_\lambda)$ oder $h_\lambda=0$ bzw. $r_\lambda=0$ gilt. Hierbei sei für jedes Element $a\in A$ mit $a\neq 0$ seine Ordnung $ord_{F_A}(a)$ definiert durch

$$ord_{F_A}(a):= \max \{d\in\mathbb{N}^n\colon\ a\in F_A^d\} ,$$

wobei das Maximum im Sinne der Relation $\ll$ zu verstehen ist. Wir bemerken, unsere Voraussetzungen über $\ll$ und die n- Filtration F_A sichern, daß $ord_{F_A}(a)$ tatsächlich für alle $a\in A$ mit $a\neq 0$ definiert ist.

Wir bezeichnen nun mit $I^{(d)}\subseteq I\cap F_A^d$ das Ideal aus allen Elementen, die in der angegebenen Weise darstellbar sind. Sei $x\in I\cap F_A^d$. Dann ist $in(x)\in gr_{F_A}(I,A)\subseteq gr_{F_A}(A)$ Null oder ein homogenes Element mit einem Multigrad d' mit $d\ll d'$. Also gibt es eine Darstellung

$$in(x)= \sum_{\lambda\in\Lambda} in(h_\lambda)in(r_\lambda) ,$$

wobei für alle $\lambda\in\Lambda$ $h_\lambda\in A$ und $d\ll deg(in(h_\lambda))+ deg(in(r_\lambda))$, also $d\ll ord_{F_A}(h_\lambda)+ ord_{F_A}(r_\lambda)$ (oder evtl. $h_\lambda=0$ bzw. $r_\lambda=0$) gilt. Dies liefert

$$x\in I^{(d)}+F_A^{d^\nu},$$

also wegen $x\in I$ und $I^{(d)}\subseteq I$ sogar $x\in I^{(d)}+I\cap F_A^{d^\nu}$. Wir haben

$$I\cap F_A^d\subseteq I^{(d)}+I\cap F_A^l$$

für $l=d^\nu$ erhalten. Iterativ gewinnt man dies für beliebiges $l\in\mathbb{N}^n$ mit $d\ll l$. Sei nun die natürliche Zahl N so gewählt, daß A über A(0) von homogenen Elementen vom Grade höchstens N erzeugt wird. Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt dann $A(\geqslant kN)\subseteq A(\geqslant 1)^k$. Es ergibt sich für beliebig große $p,q\in\mathbb{N}$ $I\cap F_A^d\subseteq I^{(d)}+ (I\cap F_A^d)\cap A(\geqslant 1)^p$ und $I\cap F_A^d\subseteq I^{(d)}+ A(\geqslant 1)^q(I\cap F_A^d)$, wenn man das Lemma von Artin- Rees benutzt. Die letzte Inklusion ist für q=1 trivialerweise eine Gleichheit, woraus tatsächlich die

Behauptung $I \cap F_A^d = I^{(d)}$ folgt.

Wir setzen nun

$N_{gr_{F_A}(I,A)}(<-1) = 0$

voraus. Der injektive Homomorphismus (*) liefert $gr(N_I)(<-1) = 0$. Angenommen, es wäre dennoch $N_I(<-1) \neq 0$. Sei dann $g \in N_I$ ein ein von Null verschiedenes homogenes Element von einem Grad $k < -1$. Wir setzen für alle $\lambda \in \Lambda$ $s_\lambda = g(r_\lambda) \in A/I$. Gilt dann für einen Multiindex $d \in \mathbb{Z}^n$ für alle $\lambda \in \Lambda$ (mit $r_\lambda \neq 0$ und $s_\lambda \neq 0$)

$$\mathrm{ord}_{F_A}(r_\lambda) + d \ll \mathrm{ord}_{F_{A/I}}(s_\lambda) \ ,$$

($F_{A/I}$ sei die Bild- n- Filtration von F_A)

so impliziert dies bereits $g \in F_{N_I}^d$. Es gibt nämlich für jedes $x \in I \cap F_A^i$ eine Darstellung $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda r_\lambda$ mit $i \ll \min_\lambda (\mathrm{ord}_{F_A}(r_\lambda) + \mathrm{ord}_{F_A}(h_\lambda))$ und dies liefert

$$\begin{aligned} i+d &\ll \min_\lambda (\mathrm{ord}_{F_A}(r_\lambda) + d + \mathrm{ord}_{F_A}(h_\lambda)) \\ &\ll \min_\lambda (\mathrm{ord}_{F_{A/I}}(s_\lambda) + \mathrm{ord}_{F_A}(h_\lambda)) \\ &\ll \mathrm{ord}_{F_{A/I}}\Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda s_\lambda\Big) \\ &= \mathrm{ord}_{F_{A/I}}(g(x)) \ . \end{aligned}$$

Insbesondere wird klar, daß es ein $d_0 \in \mathbb{Z}^n$ mit $g \in F_{N_I}^{d_0}$ gibt. Da $0 \ll e_i$ für alle Einheitsvektoren e_i gilt, kann man d_0 so klein wählen, daß für alle $\lambda \in \Lambda$ (mit $r_\lambda \neq 0$)

$$-\mathrm{ord}_{F_A}(r_\lambda) \in d_0 + \mathbb{N}^n \tag{+}$$

eintritt. Die Gruppenstruktur auf $\mathbb{Z}^n$ liefert nun, daß mit $(\mathbb{N}^n, \ll)$ auch $(d_0 + \mathbb{N}^n, \ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N}, \leqslant)$ ist. Damit liefern unsere Voraussetzung über die Beschaffenheit von F_A und die Annahme $g \neq 0$, daß es ein (im Sinne der Relation $\ll$) maximales $d' \in d_0 + \mathbb{N}^n$ mit $g \in F_{N_I}^{d'}$ gibt. $gr(N_I)(<-1) = 0$ sichert jetzt sogar $g \in F_{N_I}^{d'^{\mu}}$. Es gilt also für alle $\lambda \in \Lambda$ (mit $r_\lambda \neq 0$ und $s_\lambda \neq 0$)

$$d'^{\mu} \ll \mathrm{ord}_{F_{A/I}}(s_\lambda) - \mathrm{ord}_{F_A}(r_\lambda) \ .$$

Wegen (+) gehört die rechte Seite zu $d_0 + \mathbb{N}^n$. Man kann daher d'^{μ} durch das nächstgrößere Element d'' aus $d_0 + \mathbb{N}^n$ ersetzen, erhält $g \in F_{N_I}^{d''}$ und einen Widerspruch zur Maximalität von d'.

Damit ist auch der letzte Teil der Behauptung bewiesen.

Q.E.D.

(3.17) DEFINITIONEN

Wie bisher bezeichne $\ll$ eine Ordnungsrelation auf der Gruppe $(\mathbb{Z}^n,+)$, die mit der Gruppenoperation verträglich ist und auf $\mathbb{N}^n$ eine Wohlordnung induziert.

a) Seien nun R ein Ring, H eine Filtration und F eine n- Filtration (bezüglich $\ll$) auf R. Wir werden sagen, F *verfeinert* H oder F *ist eine Verfeinerung von* H, wenn für alle $k\in\mathbb{N}$ ein $d\in\mathbb{N}^n$ existiert mit

$F^d = H^k$.

b) Es seien L ein Körper, $X_1,\dots,X_n$ Unbestimmte und $R_0 := L[[X_1,\dots,X_n]]$. Die n- Filtration F auf R_0 mit

$F^d := (X_1^{e_1}\bullet\dots\bullet X_n^{e_n})_{d\ll e,\, e\in\mathbb{N}^n}$

für alle $d\in\mathbb{N}$ werden wir dann als (bezüglich $\ll$) *monomiale* n- Filtration auf R_0 bezeichnen.

Wir bemerken, daß jede Potenzreihe aus R_0 bezüglich einer monomialen n- Filtration als Anfangsform ein Monom vom Typ $rX_1^{a_1}\bullet\dots\bullet X_n^{a_n}$ mit $r\in L$ hat. Dies ist der eigentliche Grund, weshalb wir uns für monomiale n- Filtrationen interessieren.

Wir kommen nun zu dem bereits angekündigten Satz. Er gestattet, das Problem, ob für $R_0 := L[[X_1,\dots,X_n]]$ und ein gewisses Ideal $I_0 \subseteq R_0$ die Beziehung $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ besteht, auf die Frage $N_{gr_H(I'_0,R_0)}(<-1) = 0$ zurückzuführen, wobei das Ideal $I'_0 \subseteq R_0$ von Monomen erzeugt wird. Hierbei ist H eine gewöhnliche monomiale Filtration auf R_0.

(3.18) SATZ

Es seien L ein Körper, $X_1,\dots,X_n$ Unbestimmte, $R_0 := L[[X_1,\dots,X_n]]$ und $I_0 \subseteq R_0$ ein Ideal in R_0. Der lokale Ring R_0 sei mit einer koendlichen, in $(X_1,\dots,X_n)$ monomialen Filtration H versehen, wobei wir $gr_H(R_0)$ als noethersch annehmen.

Weiter sei $\ll$ eine mit der Gruppenoperation verträgliche Ordnungsrelation auf $(\mathbb{Z}^n,+)$ derart, daß jedes Element $d\in\mathbb{Z}^n$ einen unmittelbaren Nachfolger besitzt und $(\mathbb{N}^n,\ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist. F sei die bezüglich $\ll$ monomiale n- Filtration auf R_0. Wir setzen voraus, daß F die Filtration H verfeinert.

Wir fassen nun $gr_F(R_0) \cong L[X_1,\dots,X_n]$ als einen Teilring von R_0 auf. $I'_0 \subseteq R_0$ sei das Ideal, das von allen Anfangsformen bezüglich F $in_F(i_0) \in gr_F(R_0) \subseteq R_0$ der Elemente $i_0 \in I_0$ erzeugt wird. Ist dann $N_{gr_H(I'_0,R_0)}(<-1) = 0$, so gilt auch $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1) = 0$.

B e w e i s: Wir wollen Lemma (3.16) verwenden. Zunächst sei bemerkt, daß die Relation $\ll$ allen Bedingungen aus diesem Lemma genügt. Wie setzen $A := gr_H(R_0)$ und $I := gr_H(I_0,R_0)$. Dann ist A ein noetherscher graduierter Ring und I ein homogenes Ideal.

Im Sinne von L- Vektorräumen gilt $gr_H(R_0) \cong L[X_1,...,X_n]$. Wir fassen daher $A = gr_H(R_0)$ als einen Teilraum von R_0 auf. Sei für alle $d \in \mathbb{N}^n$

$F_A^e := F^e \cap A$

gesetzt. Da die Multiplikation von Monomen in A mit der in R_0 übereinstimmt oder 0 liefert, sind die F_A^e Ideale in A und F_A ist eine n- Filtration.

Die Ringe $A = gr_H(R_0)$ und $gr_{F_A}(A) = gr_{F_A}(gr_H(R_0))$ sind isomorph, denn sie stimmen beide als L- Vektorräume mit $L[X_1,...,X_n]$ überein und die Anwendung von gr_{F_A} verursacht nicht, daß zusätzliche Produkte von Monomen verschwinden. Insbesondere ist $gr_{F_A}(A)$ noethersch.

Da die Ideale F_A^e von Monomen erzeugt werden und H eine monomiale Filtration ist, ist F_A verträglich mit der graduierten Struktur auf $A = gr_H(R_0)$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Da die Filtration H auf R_0 koendlich ist, gibt es dann ein $d \in \mathbb{N}$ derart, daß $(X_1,...,X_n)^d \subseteq H^k$ gilt. Dies liefert für den graduierten Ring $A = gr_H(R_0)$, daß jedes Monom $X_1^{a_1} \cdot ... \cdot X_n^{a_n}$ mit $a_1 + ... + a_n \geqslant d$ in $A(\geqslant k)$ liegt. Wir wählen nun $e \in \mathbb{N}^n$ derart, daß $(a_1,..,a_n) \ll e$ eintritt, sobald $a_1 + ... + a_n < d$ und $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt. Da F monomiale n- Filtration ist, wird das Ideal $F_A^e \subseteq A$ nur von Monomen $X_1^{a_1} \cdot ... \cdot X_n^{a_n}$ mit $a_1 + ... + a_n \geqslant d$ erzeugt. Insgesamt ergibt sich

$F_A^e \subseteq A(\geqslant k)$.

Wir haben somit alle Voraussetzungen von Lemma (3.16) überprüft. Um die Behauptung $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ abzusichern, wäre zu zeigen, daß $N_{gr_{F_A}(gr_H(I_0,R_0)),gr_H(R_0)}(<-1) = 0$ gilt. Untersuchen wir diesen Normalenmodul. Der zu betrachtende Ring ist $gr_{F_A}(gr_H(R_0))$, was isomorph zu $gr_H(R_0)$ ist. Das zu betrachtende Ideal $gr_{F_A}(gr_H(I_0,R_0),gr_H(R_0))$ wird erzeugt von den Anfangsformen bezüglich F (F_A) der Anfangsformen bezüglich H der Elemente von I_0. Nun ist F eine Verfeinerung von H, so daß es genügt, unmittelbar Anfangsformen bezüglich F zu wählen. Der zu untersuchende Normalenmodul ist also eigentlich $N_{gr_H(I'_0,R_0)}(<-1)$, dessen Verschwinden vorausgesetzt war.

Q.E.D.

Zur praktischen Anwendung dieses Satzes sind zwei weitere Überlegungen notwendig, nämlich eine Konstruktion von Ordnungsrelationen auf $\mathbb{Z}^n$, die allen Voraussetzungen des Satzes genügen, und ein Verfahren zur Berechnung der Ideale I'_0 .

(3.19) BEMERKUNG

H sei eine in $(X_1,...,X_n)$ quasi-homogene Filtration auf dem lokalen Ring $R_0 := L[[X_1,...,X_n]]$, wobei das definierende n- Tupel $q = (q_1,...,q_n)$ nur rationale Komponenten enthält.

Dann gibt es eine mit der Gruppenoperation verträgliche Ordnungsrelation $\ll$ auf $(\mathbb{Z}^n,+)$ derart, daß jedes Element $d \in \mathbb{Z}^n$ einen unmittelbaren Nachfolger besitzt, $(\mathbb{N}^n,\ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist und die (bezüglich $\ll$) monomiale n- Filtration F auf R_0 eine Verfeinerung von H ist.

Eine solche Relation erhält man wie folgt.

Für $(a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n) \in \mathbb{Z}^n$ sei

$(a_1,...,a_n) \ll (b_1,...,b_n)$

genau dann, wenn

$q_1a_1+...+q_na_n < q_1b_1+...+q_nb_n$ oder

$q_1a_1+...+q_na_n = q_1b_1+...+q_nb_n$ und $a_1=b_1,...,a_{i-1}=b_{i-1}, a_i<b_i$

für ein gewisses $i \in \{1,...,n+1\}$ gilt. (Letzteres bedeute sinngemäß für $i=1$ $a_1<b_1$, für $i=n+1$ $a_1=b_1,...,a_n=b_n$.)

Man könnte $\ll$ als *durch* q *bewichtete gradweise lexikographische Ordnung* bezeichnen.

B e w e i s der von $\ll$ geforderten Eigenschaften: Nach Konstruktion ist $\ll$ eine mit der Gruppenoperation verträgliche Ordnungsrelation auf $(\mathbb{Z}^n,+)$. Der unmittelbare Nachfolger von $(0,...,0)$ ist $(0,...,0,x,-\frac{q_{n-1}}{q_n}\cdot x)$, wobei x die kleinste positive ganze Zahl mit $-\frac{q_{n-1}}{q_n}\cdot x \in \mathbb{Z}$ sei. Die Gruppenoperation überträgt dessen Existenz auf alle $d \in \mathbb{Z}^n$. Für jedes $C \in \mathbb{R}$ gibt es nur endlich viele $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $q_1a_1+...+q_na_n \leqslant C$. Folglich existiert eine relationstreue Bijektion zwischen $(\mathbb{N}^n,\ll)$ und $(\mathbb{N},\leqslant)$. Sei k eine beliebige natürliche Zahl. $d \in \mathbb{N}^n$ sei dann das bezüglich $\ll$ kleinste Element mit $q_1d_1+...+q_nd_n \geqslant k$. Die Definitionen von H und F liefern $H^k=F^d$. Folglich ist F eine Verfeinerung von H.

Q.E.D.

(3.20) LEMMA

Sei $\ll$ eine Ordnungsrelation auf $(\mathbb{Z}^n,+)$, die mit der Gruppenstruktur verträglich ist und für die $(\mathbb{N}^n,\ll)$ relationstreu bijektiv

zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist. Weiter seien L ein Körper, $X_1,\dots,X_n$ Unbestimmte, $R_0 := L[[X_1,\dots,X_n]]$ und F die bezüglich $\leqslant$ monomiale Filtration auf R_0. I_0 sei ein Ideal in R_0 und $s := (s_1,\dots,s_N) \in R_0^N$ ein Erzeugendensystem von I_0. Desweiteren seien $r^j = (r_1^j,\dots,r_N^j) \in gr_F(R_0)^N$, $j\in\{1,\dots,k\}$ homogene Syzygien von $in_F(s) := (in_F(s_1),\dots,in_F(s_N)) \in$ $\in gr_F(R_0)^N$, die den Syzygienmodul von $in_F(s)$ erzeugen. (Wir betrachten $gr_F(R_0) \cong L[X_1,\dots,X_n]$ als einen Teilring von R_0.)
Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $in_F(s)$ ist bereits ein Erzeugendensystem des Anfangsformenideals $gr_F(I_0,R_0)$.

(ii) Es gibt n- Tupel $h^j = (h_1^j,\dots,h_N^j) \in R_0^N$ derart, daß in R_0 $\langle r^j,s\rangle = \langle h^j,s\rangle$ für alle j gilt, sowie mit gewissen $a_i^j, b_i \in \mathbb{N}^n$ die Beziehungen $h_i^j \in F^{a_i^j}$, $s_i \in F^{b_i}$ bestehen, wobei $a_i^j + b_i$ (bezüglich $\leqslant$) echt größer ist als die Syzygienordnung von r^j für alle i und j.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, bilden die Syzygien $r^1-h^1,\dots$ $\dots,r^k-h^k$ von s bereits ein Erzeugendensystem des Syzygienmoduls von s.

(Es sei bemerkt, daß eine Syzygie $r = (r_1,\dots,r_N) \neq 0$ von $in_F(s)$ *homogen* heißt, wenn $r_1,\dots,r_N$ homogene Elemente von $gr_F(R_0)$ sind und $\deg(r_i) + \deg(in_F(s_i))$ unabhängig ist von i für alle $i\in\{1,\dots,N\}$ mit $r_i \neq 0$ und $in_F(s_i) \neq 0$. Dieses von i unabhängige Element von $\mathbb{N}^n$ heißt *Syzygienordnung* von r.)

B e w e i s: [He-1], Lemma (4.3) unterscheidet sich nicht inhaltlich, sondern nur in der Formulierung von unserer Aussage.

Q.E.D.

(3.21) BEMERKUNG

Ist r^j eine triviale Syzygie,

$r^j = (0,\dots,0,in_F(s_u),0,\dots,0,-in_F(s_v),0,\dots,0)$

mit $r_v^j = in_F(s_u)$ und $r_u^j = -in_F(s_v)$, so ist die Bedingung (ii) für das entsprechende j automatisch erfüllt. Mit

$h^j := (0,\dots,0,-s_u+in_F(s_u),0,\dots,0,s_v-in_F(s_v),0,\dots,0)$

gilt nämlich

$$\begin{aligned}\langle r^j,s\rangle-\langle h^j,s\rangle &= \langle(0,\dots,0,s_u,0,\dots,0,-s_v,0,\dots,0),s\rangle\\ &= 0 .\end{aligned}$$

(3.22) BEISPIEL

Es seien $R_0 := L[[X,Y,Z]]$ und $B_0 := R_0/I_0$ mit

$I_0 := (X^2,XY,Y^2,Z^3+XZ)$.

Dann hat B_0 mit der (X,Y,Z^3)- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ lokaler Ringe mit der Faser (B_0,n_0)

$H_B^1 \geqslant H_A^1$ und $e(B)\geqslant 3\bullet e(A)$.

B e w e i s: Zeigen wir zunächst, daß B_0 nur tangential flache Deformationen besitzt. Dazu wollen wir $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1)=0$ verifizieren, wobei H die (X,Y,Z^3)- adische Filtration auf R_0 bedeute. Offenbar fällt H mit der durch (X,Y,Z) definierten $(1,1,\frac{1}{3})$- Filtration zusammen. Damit gibt es eine mit der Gruppenoperation verträgliche Ordnungsrelation $\ll$ auf $\mathbb{Z}^3$ derart, daß jedes Element $d\in\mathbb{Z}^3$ einen unmittelbaren Nachfolger besitzt, $(\mathbb{N}^3,\ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist und die (bezüglich $\ll$) monomiale n- Filtration F auf R_0 eine Verfeinerung von H ist. Man wähle nämlich die durch $(1,1,\frac{1}{3})$ bewichtete gradweise lexikographische Ordnung, wobei $X \mathrel{\hat{=}} X_1$, $Y\mathrel{\hat{=}} X_2$ und $Z\mathrel{\hat{=}} X_3$ angenommen sei. Wir fassen nun $gr_F(R_0)$ als einen Teilring von R_0 auf und untersuchen das Ideal I'_0, das von allen Anfangsformen $in_F(i_0)\in gr_F(R_0)\subseteq R_0$ der Elemente aus I_0 erzeugt wird. Wir wollen $I'_0=(X^2,XY,Y^2,Z^3)$ zeigen. Dazu ist die Bedingung (ii) von Lemma (3.20) zu überprüfen. (Man beachte, wegen $(0,0,3)\ll(1,0,1)$ ist Z^3 tatsächlich die Anfangsform von Z^3+XZ.) Wir erhalten die folgende Tabelle.

Erzeugende von I_0	s	X^2	XY	Y^2	$Z^3(+XZ)$
Erzeugende des Syzygienmoduls	r^1	Y	$-X$		
(ohne triviale Syzygien)	r^2		Y	$-X$	

Es gilt $\langle r^1,s\rangle=\langle r^2,s\rangle=0$, so daß man $h^1=h^2=0$ setzen kann. Aus Beispiel (3.12) ergibt sich $N_{gr_H(I'_0,R_0)}(<-1)=0$. Nach Lemma (2.8) ist $gr_H(R_0)$ noethersch, so daß wir Satz (3.18) anwenden können und $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1)=0$ erhalten.

Man stellt unschwer $l(B_0/H^1B_0)=3$ und $l(B_0)\geqslant l(gr_F(B_0))=l(R_0/I'_0)=9$ fest. Die von H auf B_0 induzierte Filtration ist separiert. Nach Satz (3.6) gelten die behaupteten Ungleichungen.

Q.E.D.

(3.23) BEISPIEL

Es seien $R_0:=L[[X,Y,Z]]$ und $B_0:=R_0/I_0$ mit

$I_0:=(X^2+YZ^2,XY,Y^2+YZ^2,XZ^2,Z^3+YZ^2)$.

Dann hat B_0 mit der (X,Y,Z^2)- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m)\to(B,n)$ lokaler Ringe mit der Faser (B_0,n_0)

$H_B^1 \geqslant H_A^1$ und $e(B)\geqslant 4\cdot e(A)$.

B e w e i s: Zeigen wir zunächst, daß B_0 nur tangential flache Deformationen besitzt. Dazu wollen wir $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1)=0$ verifizieren, wobei H die (X,Y,Z^2)- adische Filtration auf R_0 bedeute. Offenbar fällt H mit der durch (X,Y,Z) definierten $(1,1,\frac{1}{2})$- Filtration zusammen. Damit gibt es eine mit der Gruppenoperation verträgliche Ordnungsrelation $\ll$ auf $\mathbb{Z}^3$ derart, daß jedes Element $d\in\mathbb{Z}^3$ einen unmittelbaren Nachfolger besitzt, $(\mathbb{N}^3,\ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist und die (bezüglich $\ll$) monomiale n- Filtration F auf R_0 eine Verfeinerung von H ist. Man wähle nämlich die durch $(1,1,\frac{1}{2})$ bewichtete gradweise lexikographische Ordnung, wobei $X\triangleq X_3$, $Y\triangleq X_2$ und $Z\triangleq X_1$ (!) angenommen sei. Wir fassen nun $gr_F(R_0)$ als einen Teilring von R_0 auf und untersuchen das Ideal I_0', das von allen Anfangsformen $in_F(i_0)\in gr_F(R_0)\subseteq R_0$ der Elemente aus I_0 erzeugt wird. Wir wollen $I_0'=(X^2,XY,Y^2,XZ^2,Z^3)$ zeigen. Dazu ist die Bedingung (ii) von Lemma (3.20) zu überprüfen.

Wir erhalten die folgende Tabelle.

Lfd. Nr.		1	2	3	4	5	
Erzeugende von I_0	s	$X^2(+YZ^2)$	XY	$Y^2(+YZ^2)$	XZ^2	$Z^3(+YZ^2)$	$\langle r^j,s\rangle$
Erzeugende des Syzygienmoduls (ohne triviale Syzygien)	r^1	Y	$-X$				Y^2Z^2
	r^2	Z^2			$-X$		YZ^4
	r^3		Y	$-X$			$-XYZ^2$
	r^4		Z^2		$-Y$		0
	r^5				Z	$-X$	$-XYZ^2$

Alle $\langle r^j,s\rangle$ sind durch h^j im Sinne des Lemmas auszudrücken. Wie dies geschieht, zeigt die folgende Tabelle.

Lfd. Nr.		1	2	3	4	5	
Erzeugende von I_0		$X^2(+YZ^2)$	XY	$Y^2(+YZ^2)$	XZ^2	$Z^3(+YZ^2)$	$\langle r^j,s\rangle$
Koeffizienten	h^1			$Z^2\cdot\frac{1}{1-Z}$		$-YZ\cdot\frac{1}{1-Z}$	Y^2Z^2
	h^2			$-Z^3\cdot\frac{1}{1-Z}$		$YZ\cdot\frac{1}{1-Z}$	YZ^4
	h^3				$-Y$		$-XYZ^2$
	h^4						0
	h^5				$-Y$		$-XYZ^2$

Man beachte hier, daß $\frac{1}{1-Z} = 1 + Z + Z^2 + \ldots$ eine Potenzreihe aus R_0 ist. Aus Beispiel (3.8) ergibt sich $N_{gr_H(I'_0,R_0)}(<-1) = 0$. Nach Lemma (2.8) ist $gr_H(R_0)$ noethersch, so daß wir Satz (3.18) anwenden können und $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ erhalten.

Man stellt unschwer $l(B_0/H^1B_0) = 2$ und $l(B_0) \geqslant l(gr_F(B_0)) = l(R_0/I'_0) = 8$ fest. Die von H auf B_0 induzierte Filtration ist separiert. Nach Satz (3.6) gelten die behaupteten Ungleichungen.

Q.E.D.

(3.24) BEISPIEL

Es seien $R_0 := L[[X,Y,Z]]$ und $B_0 := R_0/I_0$ mit

$I_0 := (XZ+YZ,\ Z^2,\ X^3+X^2Y+YZ,\ XY^2+YZ,\ Y^2Z,\ Y^3+YZ)$.

Dann hat B_0 mit der (X^2,XY,Y^2,Z)- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen. Insbesondere gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f:(A,m) \rightarrow (B,n)$ lokaler Ringe mit der Faser (B_0,n_0)

$H_B^1 \geqslant \frac{3}{4} \bullet H_A^1$ und $e(B) \geqslant \frac{9}{4} \bullet e(A)$.

B e w e i s: Zunächst zeigen wir, daß B_0 nur tangential flache Deformationen besitzt. Dazu wollen wir $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1) = 0$ überprüfen, wobei H die (X^2,XY,Y^2,Z)- adische Filtration auf R_0 bedeute. Offenbar fällt H mit der durch (X,Y,Z) definierten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$- Filtration zusammen. Damit gibt es eine mit der Gruppenoperation verträgliche Ordnungsrelation $\ll$ auf $\mathbb{Z}^3$ derart, daß jedes Element $d \in \mathbb{Z}^3$ einen unmittelbaren Nachfolger besitzt, $(\mathbb{N}^3,\ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist und die (bezüglich $\ll$) monomiale n- Filtration F auf R_0 eine Verfeinerung von H ist. Man wähle nämlich die durch $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ bewichtete gradweise lexikographische Ordnung, wobei $X \triangleq X_3$, $Y \triangleq X_2$ und $Z \triangleq X_1$ (!) angenommen sei. Wir fassen nun $gr_F(R_0)$ als einen Teilring von R_0 auf und untersuchen das Ideal I'_0, das von allen Anfangsformen $in_F(i_0) \in gr_F(R_0) \subseteq R_0$ der Elemente aus I_0 erzeugt wird. Wir wollen $I'_0 = (XZ,Z^2,X^3,XY^2,Y^2Z,Y^3)$ zeigen. Dazu ist die Bedingung (ii) von Lemma (3.20) zu überprüfen.

Wir erhalten die folgende Tabelle.

Lfd. Nr.		1	2	3	4	5	6	
Erzeugende von I_0	s	$XZ(+YZ)$	Z^2	$X^3(+X^2Y+YZ)$	$XY^2(+YZ)$	Y^2Z	$Y^3(+YZ)$	$\langle r^j,s\rangle$
Erzeugende des Syzygien-	r^1	Z	$-X$					YZ^2
	r^2	X^2		$-Z$				$-YZ^2$

		1	2	3	4	5	6	
moduls (ohne triviale Syzygien)	r^3	Y^2			$-Z$			Y^3Z-YZ^2
	r^4	Y^2				$-X$		Y^3Z
	r^5		Y^2			$-Z$		0
	r^6			Y^2	$-X^2$			$X^2Y^3-X^2YZ+Y^3Z$
	r^7				Z	$-X$		YZ^2
	r^8				Y		$-X$	$-XYZ+Y^2Z$
	r^9					Y	$-Z$	$-YZ^2$

Alle $\langle r^j, s\rangle$ sind durch h^j im Sinne des Lemmas auszudrücken. Wie dies geschieht, zeigt die folgende Tabelle.

Lfd. Nr.		1	2	3	4	5	6	
Erzeugende von I_0	s	$XZ(+YZ)$	Z^2	$X^3(+X^2Y+YZ)$	$XY^2(+YZ)$	Y^2Z	$Y^3(+YZ)$	$\langle r^j, s\rangle$
Koeffizienten	h^1		Y					YZ^2
	h^2		$-Y$					$-YZ^2$
	h^3		$-Y$			Y		Y^3Z-YZ^2
	h^4					Y		Y^3Z
	h^5							0
	h^6	$-XY$			XY	Y		$X^2Y^3-X^2YZ+Y^3Z$
	h^7		Y					YZ^2
	h^8	$-Y$				2		$-XYZ+Y^2Z$
	h^9		$-Y$					$-YZ^2$

Aus Beispiel (3.10) ergibt sich $N_{gr_H(I'_0,R_0)}(<-1)= 0$. Nach Lemma (2.8) ist $gr_H(R_0)$ noethersch, so daß wir Satz (3.18) anwenden können und $N_{gr_H(I_0,R_0)}(<-1)= 0$ erhalten.

Man stellt unschwer $l(B_0/H^1B_0)= 3$ und $l(B_0)\geqslant l(gr_F(B_0))= l(R_0/I'_0)= 9$ fest. Die von H auf B_0 induzierte Filtration ist separiert. Nach Satz (3.6) gelten die behaupteten Ungleichungen.

Q.E.D.

Wir haben nun die Absicht, zu beweisen, daß sogar für jeden lokalen Ring $B_0 := R_0/I_0$ mit $R_0 := L[[X_1,\dots,X_n]]$ eine Filtration auf R_0 existiert, mit der B_0 nur tangential flache Deformationen besitzt. Es wird sich herausstellen, daß man diese gar $(X_1,\dots,X_n)^d$- adisch ($d\in\mathbb{N}$) wählen kann. Zur Vorbereitung benötigen wir das folgende Lemma, das die Situation, daß I_0 von Monomen erzeugt wird, behandelt.

(3.25) LEMMA

Es seien L ein Körper, $X_1,\dots,X_n$ Unbestimmte und $R_0 := L[[X_1,\dots,X_n]]$. Das Ideal I_0 in R_0 werde von Monomen in $X_1,\dots,X_n$ vom (üblichen)

Grade höchstens d (mit $d\in\mathbb{N}$) erzeugt. Dann hat $B_0 := R_0/I_0$ mit der $(X_1,\dots,X_n)^d$- adischen Filtration auf R_0 nur tangential flache Deformationen.

B e w e i s: Der Ring R_0 ist noethersch. Wir können daher annehmen, endlich viele Monome $X^{\nu_1},\dots,X^{\nu_N}$ mit $|\nu_1|\leqslant d$, ..., $|\nu_N|\leqslant d$ erzeugen I_0. Wir wollen $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)=0$ zeigen.

Es gilt $gr(R_0)=L[X_1,\dots,X_n]$ als L- Vektorraum. Für die Multiplikation ergibt sich hier

$$X^{\nu}\bullet X^{\mu}=\begin{cases} X^{\nu+\mu} & \text{falls } \left\lceil\frac{|\nu|}{d}\right\rceil+\left\lceil\frac{|\mu|}{d}\right\rceil=\left\lceil\frac{|\nu+\mu|}{d}\right\rceil \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (*)$$

wenn man $\deg(X^{\alpha})=\left\lceil\frac{|\alpha|}{d}\right\rceil$ beachtet. Offenbar vereinfacht sich (*) zu $\left\{\frac{|\nu|}{d}\right\}+\left\{\frac{|\mu|}{d}\right\}<1$.

Es sei bemerkt, daß in den Fällen $|\mu|=d$ bzw. $|\nu+\mu|<d$ diese Bedingung automatisch erfüllt ist.

$gr(I_0,R_0)$ wird von allen Anfangsformen der Elemente aus I_0 erzeugt, damit von allen Monomen, die im Sinne von R_0 Vielfache von $X^{\nu_1},\dots,X^{\nu_N}$ sind. Um zu Vielfachen im Sinne von $gr(R_0)$ übergehen zu können, ist hierbei jedes Monom X^{ν_i} durch all seine Vielfachen vom üblichen Grad d zu ergänzen. Insgesamt ergibt sich, daß $gr(I_0,R_0)$ nur von Elementen der Grade 0 und 1 des graduierten Ringes $gr(R_0)$ erzeugt wird. M bezeichne ein solches Erzeugedensystem.

Die homogenen Elemente von $N_{gr(I_0,R_0)}$ des Grades l werden somit gegeben durch Systeme G homogener Elemente von $gr(R_0)$ der Grade l und l+1, für welche die Implikation

$$\langle r,M\rangle=0 \Rightarrow \langle r,G\rangle\in gr(I_0,R_0)$$

besteht, wobei die Skalarprodukte und die Begriffe "Grad" und "homogen" im Sinne des graduierten Ringes $gr(R_0)$ zu verstehen sind.

Homogene Elemente von einem Grad kleiner als -1 fordern hier homogene Elemente von $gr(R_0)$ von negativem Grad. Da diese nicht vorkommen, gilt $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)=0$.

Q.E.D.

(3.26) PROPOSITION

Es seien L ein Körper, $X_1,\dots,X_n$ Unbestimmte, $R_0:=L[[X_1,\dots,X_n]]$ und I_0 ein Ideal in R_0. Dann existiert eine natürliche Zahl d>0 derart, daß $B_0:=R_0/I_0$ mit der $(X_1,\dots,X_n)^d$- adischen Filtration

auf R_0 nur tangential flache Deformationen besitzt.
B e w e i s: $H(d)$ sei die $(X_1,...,X_n)^d$- adische Filtration auf R_0. Wir wollen zeigen, daß für ein gewisses $d\in\mathbb{N}$ die Beziehung $N_{gr(I_0,R_0)}(<-1)=0$ besteht.

Sei $\ll$ die durch $(1,1,...,1)$ bewichtete gradweise lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Z}^n$. Dies ist eine mit der Gruppenoperation verträgliche Ordnungsrelation derart, daß jedes Element $d\in\mathbb{Z}^n$ einen unmittelbaren Nachfolger besitzt und $(\mathbb{N}^n,\ll)$ relationstreu bijektiv zu $(\mathbb{N},\leqslant)$ ist. F sei die (bezüglich $\ll$) monomiale n- Filtration auf R_0. Dann verfeinert F die $(X_1,...,X_n)$- adische Filtration und damit $H(d)$ für jedes $d\in\mathbb{N}$.

Wir fassen nun $gr(R_0)$ als einen Teilring von R_0 auf. $I'_0\subseteq R_0$ sei das Ideal, das von allen Anfangsformen $in_F(i_0)\in gr_F(R_0)\subseteq R_0$ erzeugt wird. Offenbar wird I'_0 von Monomen erzeugt und zwar, da R_0 noethersch ist, von endlich vielen. $d\in\mathbb{N}$ sei speziell so gewählt, daß es mindestens gleich dem Maximum der üblichen Grade dieser Monome ist. Lemma (3.25) liefert dann $N_{gr_{H(d)}(I'_0,R_0)}(<-1)=0$. Nach Lemma (2.8) ist $gr_{H(d)}(R_0)$ noethersch, so daß wir Satz (3.18) anwenden können und $N_{gr_{H(d)}(I_0,R_0)}(<-1)=0$ erhalten.

Q.E.D.

(3.27) BEMERKUNG

An dieses Ergebnis schließt sich eine Reihe offener Probleme an. Kann man zum Beispiel in irgendeiner Weise einen Überblick über alle in $(X_1,...,X_n)$ quasi- homogenen (oder gar monomialen) Filtrationen auf $R_0:=L[[X_1,...,X_n]]$ gewinnen, mit denen ein gegebener lokaler Ring $B_0=R_0/I_0$ nur tangential flache Deformationen besitzt? Betrachtet man die quasi- homogenen Filtrationen, so erhält man eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n_+$. Hier wäre die Frage nach deren Eigenschaften zu stellen. Ist sie zum Beispiel zusammenhängend, glatt berandet oder gar von Polyedern begrenzt?

Interessiert man sich für die Lech- Ungleichung, so sind nur Filtrationen von Bedeutung, bei denen die Filtrationsideale nicht zu klein ausfallen. Man kann also natürlicherweise die Frage stellen, ob es in einem gewissen Sinne maximale (monomiale, quasi- homogene) Filtrationen gibt, die die tangentiale Flachheit aller Deformationen von B_0 noch sichern. Trifft dies zu, so wäre zu untersuchen, ob es endlich viele sind, da wohl nur dann deren Bestimmung von Interesse (und überhaupt möglich ?) sein wird.

Die Antworten auf diese Fragen müssen hier offen bleiben.

(3.28) BEZEICHNUNGEN

Seien $e=(e_1,\dots,e_n)$ ein n- Tupel positiver ganzer Zahlen, L ein Körper und $X_1, \dots, X_n$ Unbestimmte. Dann betrachten wir den lokalen Homomorphismus

$$\Phi:\ L[[X_1,\dots,X_n]] \to L[[X_1,\dots,X_n]] \quad , \quad X_1 \mapsto X_1^{e_1}, \ \dots, \ X_n \mapsto X_n^{e_n} ,$$

der die Identität auf L induziert. Der Einfachheit halber sei die Bezeichnungsweise

$$\Phi:\ R_0 \to R_0^{(e)}$$

eingeführt. Für eine formale Potenzreihe $f\in R_0$ setzen wir

$$f^{(e)} := \Phi(f) \in R_0^{(e)} .$$

Sei nun $I_0 \subseteq R_0$ ein Ideal. Dann bezeichne $I_0^{(e)}$ das Ideal in $R_0^{(e)}$ mit

$$I_0^{(e)} := \Phi(I_0)\bullet R_0^{(e)} .$$

Ist $B_0 := R_0/I_0$ ein Faktorring, so sei

$$B_0^{(e)} := R_0^{(e)}/I_0^{(e)}$$

gesetzt. Wir bemerken, daß $B_0^{(e)}$ eine verzweigte Überlagerung von B_0 ist. Ist schließlich F eine Filtation auf R_0, so sei $F^{(e)}$ die Filtration auf $R_0^{(e)}$ mit

$$F^{(e)i} := \Phi(F^i)$$

für alle $i\in\mathbb{N}$.

(3.29) SATZ

(Wir benutzen die Bezeichnungen aus (3.28).)

I_0 sei ein Ideal in R_0. Ferner sei auf R_0 eine in $(X_1,\dots,X_n)$ monomiale Filtration F, für die $gr_F(R_0)$ noethersch ist, derart vorgegeben, daß

$$N_{gr_F(I_0,R_0)}(<-1) = 0$$

gilt.

a) Dann gilt sogar für jedes n- Tupel $e=(e_1,\dots,e_n)$ positiver ganzer Zahlen

$$N_{gr_{F^{(e)}}(I_0^{(e)},R_0^{(e)})}(<-1) = 0 .$$

b) Die positiven ganzen Zahlen $d_1, \dots, d_n$ seien so gewählt, daß

$$F^1 \supseteq (X_1^{d_1},\dots,X_n^{d_n})$$

gilt und F sei sogar endlich erzeugt. Dann gilt für jeden flachen lokalen Homomorphismus $f\colon (A,m)\to (B,n)$ lokaler Ringe mit einer Faser $B_0^{(e)} := R_0^{(e)}/I_0^{(e)}$, wobei $e=(e_1,\ldots,e_n)$ ein beliebiges n-Tupel positiver ganzer Zahlen sei, für die Hilbertreihen bzw. Multiplizitäten (im Sinne kanonischer Filtrationen)

$$H_B^1 \geqslant H_A^1 \cdot \frac{l(B_0/F^1B_0)}{d_1\cdot\ldots\cdot d_n} \quad \text{und}$$

$$e(B) \geqslant e(A)\cdot \frac{l(B_0)}{d_1\cdot\ldots\cdot d_n} .$$

Ist speziell $l(B_0/F^1B_0)= d_1\cdot\ldots\cdot d_n$, so gilt

$$H_B^1 \geqslant H_A^1 .$$

Ist $l(B_0) \geqslant d_1\cdot\ldots\cdot d_n$, so gilt

$$e(B) \geqslant e(A) .$$

B e w e i s: a) Auf $R_0^{(e)}$ betrachten wir die Filtration $F^{(e)}$ mit $F^{(e)n} := F^n\cdot R_0^{(e)}$. Der R_0- Modul $R_0^{(e)}$ ist frei vom Rang $e_1\cdot\ldots\cdot e_n$, also insbesondere flach. Wir erhalten

$$\begin{aligned} gr^n_{F^{(e)}}(R_0^{(e)}) &= F^{(e)n}/F^{(e)n+1} \\ &= F^n\cdot R_0^{(e)}/F^{n+1}\cdot R_0^{(e)} \\ &= F^n\otimes_{R_0} R_0^{(e)}/F^{n+1}\otimes_{R_0} R_0^{(e)} \\ &= gr^n_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)} . \end{aligned}$$

Es ergibt sich also $gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)}) = gr_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}$, das heißt $gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)})$ ist $gr_F(R_0)$- frei und folglich der Homomorphismus $\Phi\colon R_0\to R_0^{(e)}$ filtrierter lokaler Ringe tangential flach. Wir betrachten nun die Ringe $B_0^{(e)}$ und B_0 . Wir erhalten

$$\begin{aligned} gr_{F^{(e)}}(B_0^{(e)}) &= gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)}/I_0^{(e)}) \\ &= gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)}/I_0R_0^{(e)}) \\ &= gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)})/gr_{F^{(e)}}(I_0R_0^{(e)},R_0^{(e)}) \\ &= gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)})/gr_F(I_0,R_0)\cdot gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)}) \quad (\Phi \text{ tangential flach}) . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} gr_{F^{(e)}}(B_0^{(e)}) &= gr_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}/\ gr_F(I_0,R_0)\cdot\ (gr_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}) \\ &= gr_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}/\ gr_F(I_0,R_0)\otimes_{gr_F(R_0)} gr_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)} \\ &= gr_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}/\ gr_F(I_0,R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)} \\ &= gr_F(B_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)} . \qquad (*) \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, daß wir unter anderem

$$gr_F(I_0,R_0)\cdot gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)}) = gr_F(I_0,R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}$$

erhalten haben. Untersuchen wir nun die Normalenmoduln. Es gilt

$$\begin{aligned}
&N_{gr_{F^{(e)}}(I_0^{(e)},R_0^{(e)})}\\
&= \mathrm{Hom}_{gr_{F^{(e)}}(R^{(e)})}(gr_{F^{(e)}}(I_0^{(e)},R_0^{(e)}),gr_{F^{(e)}}(B_0^{(e)}))\\
&= \mathrm{Hom}_{gr_{F^{(e)}}(R^{(e)})}(gr_{F^{(e)}}(I_0R_0^{(e)},R_0^{(e)}),gr_{F^{(e)}}(B_0^{(e)}))\\
&= \mathrm{Hom}_{gr_{F^{(e)}}(R^{(e)})}(gr_F(I_0,R_0)\cdot gr_{F^{(e)}}(R_0^{(e)}),gr_{F^{(e)}}(B_0^{(e)})) \quad (\Phi \text{ tangential flach})\\
&= \mathrm{Hom}_{gr_F(R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}}(gr_F(I_0,R_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)},gr_F(B_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}) \quad (\text{siehe oben})\\
&= \mathrm{Hom}_{gr_F(R_0)}(gr_F(I_0,R_0),gr_F(B_0))\otimes_{R_0} R_0^{(e)} \quad (gr_F(I_0,R_0) \text{ von endlicher Darstellung, da } gr_F(R_0) \text{ noethersch})\\
&= N_{gr_F(I_0,R_0)}\otimes_{R_0} R_0^{(e)} .
\end{aligned}$$

Da unsere Rechnungen die graduierten Strukturen respektieren, gilt speziell

$$N_{gr_{F^{(e)}}(I_0^{(e)},R_0^{(e)})}(<-1) = N_{gr_F(I_0,R_0)}(<-1)\otimes_{R_0} R_0^{(e)}$$

und damit die Behauptung.

b) Teil a) liefert nach Satz (2.20), daß $B_0^{(e)}$ mit der Filtration $F^{(e)}$ nur tangential flache Deformationen besitzt. Weiter gilt nach Konstruktion

$$F^{(e)1} \supseteq (X_1^{e_1d_1},\ldots,X_n^{e_nd_n}).$$

Damit liefert Satz (3.6) die Ungleichungen

$$H_B^1 \geqslant H_A^1\cdot \frac{l(B_0^{(e)}/F^{(e)1}B_0^{(e)})}{d_1\cdot\ldots\cdot d_n\cdot e_1\cdot\ldots\cdot e_n} \text{ und}$$

$$e(B) \geqslant e(A)\cdot \frac{l(B_0^{(e)})}{d_1\cdot\ldots\cdot d_n\cdot e_1\cdot\ldots\cdot e_n} ,$$

wenn man beachtet, daß die endliche Erzeugtheit von F liefert, daß $F^{(e)}$ (stark) separiert ist. Aus Aussage (*) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
l(B_0^{(e)}) &= l(gr_{F^{(e)}}(B_0^{(e)}))\\
&= l(gr_F(B_0)\otimes_{R_0} R_0^{(e)})\\
&= l(B_0)\cdot e_1\cdot\ldots\cdot e_n .
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned}
l(B_0^{(e)}/F^{(e)1}B_0^{(e)}) &= l((B_0/F^1B_0)^{(e)})\\
&= l(B_0/F^1B_0)\cdot e_1\cdot\ldots\cdot e_n .
\end{aligned}$$

Dies liefert die behaupteten Ungleichungen. Die spezielleren Aussagen sind trivial.

Q.E.D.

(3.30) BEMERKUNGEN

Unsere hinreichende Bedingung für die tangentiale Flachheit aller Deformationen überträgt sich also in gewisser Weise auf verzweigte Überlagerungen. Dabei ändern sich die Koeffizienten der Lech- Ungleichungen, die wir nachweisen können, nicht. Insbesondere erhält man aus jedem unserer Beispiele (und auch aus jedem Beispiel aus [He-1], wo die Situation kanonischer Filtrationen behandelt wurde) ganze Beispielserien. Satz (3.29.b) ist unser bestes Ergebnis über Lech- Hironaka- Ungleichungen.

Zum Schluß sei bemerkt, daß der Begriff der tangentialen Flachheit von Homomorphismen filtrierter lokaler Ringe beim Beweis von Satz (3.29) seltsamerweise als technisches Hilfsmittel auftrat.

LITERATUR

[A-V-G] Arnold,V.I.,Varchenko,A.N.,Gusein-Zade,S.M.(Арнольд,В.И., Варченко,А.Н.,Гусейн-Заде,С.М.): Singularities of differentiable maps, Vol.I, Birkhäuser, Boston 1984

[Ar] Artin,M.: Lectures on deformations of singularities, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1976

[A-M] Atiyah,M.F.,McDonald,I.G.: Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, Reading 1969

[Bo] Bourbaki,N.: Algébre commutative, Hermann, Paris 1961-1965

[C-E] Cartan,H.,Eilenberg,S.: Homological algebra, Princeton University Press 1956

[G-H] Griffiths,P.,Harris,J.: Principles of algebraic geometry, Wiley&Sons, New York 1978

[G] Grothendieck,A.: Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math.J. 9(1957), S.119-221

[EGA] Grothendieck,A.,Dieudonné,J.: Eléments de géométrie algébrique, Publ.Math.IEHS, Paris 1960-1968

[Ha] Hartshorne,R.: Algebraic geometry, Springer, Berlin 1977

[H-O] Herrmann,M.,Orbanz,U.: Two notes on flatness, Manuscripta Math. 40(1982), S.109-133

[He-1] Herzog,B.: Local singularities such that all deformations are tangentially flat, erscheint in: Trans.Amer.Math.Soc.

[He-2] Herzog,B.: Tangential flatness for filtered modules over local rings, erscheint in: Forschungserg.der FSU Jena

[He-3] Herzog,B.: Lech-Hironaka inequalities for flat couples of local rings, erscheint in: Manuscripta Math.

[Hi] Hironaka,H.: Certain numerical characters of singularities, J. Math. Kyoto Univ. 10-1(1970), S.151-187

[L-L] Larfeldt,T.,Lech,C.: Flat couples, analytic ramification and Hilbert functions, Preprint, Stockholm 1974

[L-1] Lech,C.: Inequalities related to certain couples of local rings, Acta Math. 112(1964), S.69-89

[L-2] Lech,C.: Outline of a proof for $H^1(m_0)\leqslant H^1(m)$ for flat couples (Q_0,Q) with maximal ideals (m_0,m) such that Q/m_0Q is a complete intersection, Preprint 1964

[Lj] Ljungström,A.: Rotstein rings and some equalities concerning Hilbert functions, Thesis, Stockholm 1985

[Ma] Matsumura,H.: Commutative ring theory, Cambridge University

Press 1986

[Na] Nagata,M.: Local rings, Interscience, New York 1962

[Ri] Risler.J.-J.: Fonction de Hilbert-Samuel et extension plate d'anneaux, C.R.Acad.Sc.Paris 272(1971), S.1082-1084

[Se] Serre,J.P.: Algèbre locale-Multiplicités, Lecture Notes in Math. 11, Springer, Berlin 1965

[Ш] Shafarevich,I.R.(Шафаревич,И.Р.): Basic algebraic geometry, Springer, Berlin 1974

[Si] Singh,B.: Effect of a permissible blowing up on the local Hilbert functions, Invent.Math. 26(1974), S.201-212

[T] Tjurina,G.N.(Тюрина,Г.Н.): Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств, Узб.Акад.Наук СССР, Сер.мат. 33(1969), S.1026-1058

[V] Vasconcelos,W.V.: Ideals generated by R-sequences, J.Algebra 6(1967), S.309-316

[Z-S] Zariski,O.,Samuel,P.: Commutative algebra(Vol.I and II), Van Nostrand, Princeton 1958,1960

BEZEICHNUNGEN

$\#M$	Anzahl der Elemente der Menge M
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen, $\mathbb{N}= \{0,1,2,3,...\}$
$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+= \{x\in\mathbb{R}: x>0\}$
$l_A(M)$	Länge des Moduls M über dem Ring A
$l(A)$	$:= l_A(A)$, Länge des Ringes A
(A,m)	lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m
F_A, F, ...	oft: Filtration auf lokalem Ring A, Multifiltration auf Ring A
(A,F_A)	filtrierter lokaler Ring A (mit Filtration F_A)
$ord_{F_A}(x)= ord(x)$	$:= \sup \{d\in\mathbb{N}: x\in F_A^d\}$, Ordnung des Elementes x im filtrierten lokalen Ring (A,F_A) $:= \max \{d\in\mathbb{N}^n: x\in F_A^d\}$ (Maximum bezüglich einer gegebenen Ordnungsrelation $\ll$ auf $\mathbb{Z}^n$), Ordnung des Elementes x im Ring A bezüglich der Multifiltration F_A
E, E^A, E', ...	oft: filtrierende Exponentenfamilie, $E= (E_d)_{d\in\mathbb{N}}$ mit $E_d\subseteq \mathbb{N}^n$
$gr_{F_A}(A)= gr(A)$	$:=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_A^d/F_A^{d+1}$, assoziierter graduierter Ring zum filtrierten lokalen Ring A $:=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} F_A^d/F_A^{d^\nu}$, assoziierter multigraduierter Ring zum Ring A bezüglich der Multifiltration F_A
$gr_{F_A}(M)= gr(M)$	$:=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} F_A^dM/F_A^{d+1}M$, assoziierter graduierter gr(A)-Modul zum A- Modul M (A filtrierter lokaler Ring) $:=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^n} F_A^dM/F_A^{d^\nu}M$, assoziierter multigraduierter gr(A)- Modul zum A- Modul M (A mit Multifiltration F_A versehener Ring)
$gr_{F_A}(I,A)= gr(I,A)$	Kern der natürlichen Abbildung $gr_{F_A}(A)\to gr_{F_A}(A/I)$, Anfangsformenideal ($F_A$ (Multi-) Filtration auf A)
$in_{F_A}(x)= in(x)$	$:= \begin{cases} (x \bmod F_A^{d+1}) & \text{falls } d:= ord(x) \text{ endlich} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Anfangsform von x im filtrierten lokalen Ring A

	$:= \begin{cases} (x \bmod F_A^{d^\nu}) & \text{falls } x\in F_A^d \setminus F_A^{d^\nu} \text{ mit } d\in\mathbb{N}^n \\ 0 & \text{falls für kein } d\in\mathbb{N}^n\ x\in F_A^d\setminus F_A^{d^\nu} \text{ gilt} \end{cases}$ Anfangsform von x im Ring A bezüglich der Multifiltration F_A
F_M	oft: Filtration, Multifiltration auf Modul M
$gr_{F_M}(M) = gr(M)$	$:= \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} F_M^d/F_M^{d+1}$, assoziierter graduierter $gr_{F_A}(A)$-Modul zum A- Modul M (A filtrierter lokaler Ring) $:= \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^n} F_M^d/F_M^{d^\mu}$, assoziierter multigraduierter $gr_{F_A}(A)$- Modul zum A-Modul M (A mit Multifiltration F_A versehener Ring)
$\ll$	oft: Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}^n$, für Multifiltrationen benötigt
d^ν	für $d\in\mathbb{N}^n$, unmittelbarer Nachfolger bezüglich $\ll$ von d in $\mathbb{N}^n$
d^μ	für $d\in\mathbb{Z}^n$, unmittelbarer Nachfolger bezüglich $\ll$ von d in $\mathbb{Z}^n$
(B_0, y_0, E)	monomial filtrierter lokaler Ring; B_0 lokaler Ring, E filtrierende Exponentenfamilie, y_0 definierendes Tupel
$A^\wedge$	$:= \varprojlim_d A/F_A^d$, Vervollständigung des filtrierten lokalen Ringes A
$\hat{A}$	Vervollständigung im Sinne der kanonischen Filtration des filtrierten lokalen Ringes A, Filtrationsideale entsprechend vervollständigt
$G^d = G(d)$	d- ter homogener Bestandteil des graduierten (multigraduierten) Ringes G
deg(x)	Grad des homogenen Elementes x im graduierten (multigraduierten) Ring bzw. Modul
M[e]	für graduierten Modul über graduiertem Ring: Verschiebung der Grade um e
H_A, H_A^i	Hilbertfunktion, i-te Summentransformierte der Hilbertfunktion ($i\in\mathbb{N}$) des filtrierten lokalen Ringes A, $H_A, H_A^i: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $H_A^d(d) := l_A(F_A^d/F_A^{d+1})$, $H_A^0 := H_A$, $H_A^{i+1}(d) := \sum_{j=0}^{d} H_A^i(j)$ Funktionen H: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ werden oft identifiziert mit

	assoziierter formaler Potenzreihe $H = \sum_{d=0}^{\infty} H(d)T^d \in \mathbb{Z}[[T]]$
$H \leqslant H'$	für H, H': $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bedeutet $H(d) \leqslant H'(d)$ für alle $d \in \mathbb{N}$
h_A, h_A^i	Hilbertpolynom, i-te Summentransformierte des Hilbertpolynoms ($i \in \mathbb{N}$) des I- adisch filtrierten lokalen Ringes A, $h_A, h_A^i \in \mathbb{Q}[T]$ mit $h_A(d) = H_A(d)$, $h_A^i(d) = H_A^i(d)$ für $d \gg 0$ (für jedes i)
$e_I(A)$	Multiplizität des Ideals I im lokalen Ring A, Koeffizient von h_A^1 bei X^n ist $e_I(A)/n!$ mit $n := \dim A$
$e(A)$	$:= e_m(A)$, Multiplizität des lokalen Ringes (A,m)
dim A	Dimension des lokalen Ringes A
$n \gg 0$	(z.B. Aussage gilt für) alle n mit $n > N$ für ein gewisses $N \in \mathbb{N}$
$< \infty$	(z.B. Supremum einer Menge reeller Zahlen) ist endlich
N_I	$:= \mathrm{Hom}_R(I, R/I)$ für Ideal I im Ring R , Normalenmodul (vgl. aber Konstruktionen aus Definitionen (2.12))
$N(<k)$	$:= N/\bigoplus_{d=k}^{\infty} N(d)$ für graduierte Moduln $N = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} N(d)$ über graduiertem Ring $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R(d)$, $N(<k) \cong \bigoplus_{d<k} N(d)$ als R(0)- Moduln
$\cong$	Isomorphie von Ringen, Moduln
$A[X_1, \ldots, X_n]$	Polynomring in n Unbestimmten über dem Ring A
$A[[X_1, \ldots, X_n]]$	Potenzreihenring in n Unbestimmten über dem Ring A
Ann(I)	$:= \{x \in R : xI = (0)\}$ für eine Teilmenge I des Ringes R , Annihilator von I
Soc(A)	:= Ann(m), Sockel des lokalen Ringes (A,m)
rad(I)	$:= \{x \in R : x^n \in I$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$ für ein Ideal I im Ring R , Radikal von I
ker(f), coker(f), im(f)	Kern, Kokern bzw. Bild des Homomorphismus f von Moduln über einem Ring

sR	für einen Ring R und $s\in \prod_{\lambda\in\Lambda} R$ (Λ beliebige Indexmenge) das von den Komponenten von s erzeugte Ideal
$\langle h,r\rangle$	für einen Ring R, $h\in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$ und $r\in \prod_{\lambda\in\Lambda} R$ (Λ beliebige Indexmenge) $:= \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda r_\lambda$ (falls Λ endlich, übliches Skalarprodukt)
$\langle A,r\rangle$	$:= (\langle s^1,r\rangle,\dots,\langle s^n,r\rangle)$ für $r= (r_1,\dots,r_n)$ und Matrizen A mit den Zeilen $s^1,\dots,s^n$
$in(r)$	$:= (in(r_i))_{i\in I}$ für $r= (r_i)_{i\in I}\in \prod_{i\in I} R$ und filtrierten lokalen Ring R
X^a	$:= X_1^{a(1)}\bullet\dots\bullet X_n^{a(n)}$ für $X= (X_1,\dots,X_n)$ und $a= (a(1),\dots,a(n))$
$\lvert a\rvert$	$:= a(1)+\dots+a(n)$ für $a= (a(1),\dots,a(n))$
$(X_1,\dots,X_n)$	das von den Elementen $X_1,\dots,X_n$ im Ring R erzeugte Ideal
$(0:t)$	$:= Ann((t))$ für ein Element t eines Ringes R
(a mod I)	Restklasse von a in A/I für Ring A, $a\in A$, I Ideal in A
$\bar{a}$	bezeichnet mitunter (a mod I), wenn I aus Kontext klar ist
$[x]$	$:= \max\{n\in\mathbb{N}: n\leqslant x\}$ für $x\in\mathbb{R}$, ganzer Anteil von x
$\{x\}$	$:= x-[x]$ für $x\in\mathbb{R}$, gebrochener Anteil von x
$R_0^{(e)}$, $f^{(e)}$, $I^{(e)}$ $B_0^{(e)}$, $F^{(e)}$	falls $e= (e_1,\dots,e_n)$ ein n- Tupel positiver ganzer Zahlen, Φ: $L[[X_1,\dots,X_n]]\to L[[X_1,\dots,X_n]]$ mit $X_1\mapsto X_1^{e_1},\dots X_n\mapsto X_n^{e_n}$ wird Φ: $R_0\to R_0^{(e)}$ bezeichnet $f^{(e)}:= \Phi(f)$ für $f\in R_0$ $I_0^{(e)}:= \Phi(I_0)\bullet R_0^{(e)}$ für $I_0\subseteq R_0$ ein Ideal $B_0^{(e)}:= R_0^{(e)}/I_0^{(e)}$ falls $B_0= R_0/I_0$ $F^{(e)}$ ist die Filtration auf $R_0^{(e)}$ mit $F^{(e)i}:= \Phi(F^i)$ falls F eine Filtration auf R_0 ist
	Das durch $(g_1,\dots,g_n)\in R^n$ repräsentierte Element von $N_I= Hom_R(I,R/I)$ sei die Abbildung $\langle r,f\rangle\mapsto (\langle r,g\rangle \bmod I)$,

falls diese existiert. Dabei wird das Erzeugendensystem $f= (f_1,...,f_n)$ des Ideals I als gegeben angesehen.

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Jena, den ... ...