Zur Geometrie der $K3$-Flächen

Jörg Jahnel

Mathematisches Institut der Universität Göttingen

10.06.2009

Definition und Beispiele

Definition ($K3$-Fläche)

Eine *$K3$-Fläche* ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2, die

- eine nirgends verschwindende, holomorphe 2-Form besitzt,
- einfach zusammenhängend ist.

Definition ($K3$-Fläche)

Eine *$K3$-Fläche* ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2, die

- eine nirgends verschwindende, holomorphe 2-Form besitzt,
- einfach zusammenhängend ist.

Beispiele

- Glatte Quartiken in $\mathbf{P}^3$

Definition und Beispiele

Definition ($K3$-Fläche)

Eine *$K3$-Fläche* ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2, die

- eine nirgends verschwindende, holomorphe 2-Form besitzt,
- einfach zusammenhängend ist.

Beispiele

- Glatte Quartiken in $\mathbf{P}^3$
- Glatte vollständige Durchschnitte einer Quadrik und einer Kubik in $\mathbf{P}^4$

Definition und Beispiele

Definition ($K3$-Fläche)

Eine *$K3$-Fläche* ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2, die

- eine nirgends verschwindende, holomorphe 2-Form besitzt,
- einfach zusammenhängend ist.

Beispiele

- Glatte Quartiken in $\mathbf{P}^3$
- Glatte vollständige Durchschnitte einer Quadrik und einer Kubik in $\mathbf{P}^4$
- Glatte vollständige Durchschnitte dreier Quadriken in $\mathbf{P}^5$

Definition und Beispiele

Definition ($K3$-Fläche)

Eine *$K3$-Fläche* ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2, die

- eine nirgends verschwindende, holomorphe 2-Form besitzt,
- einfach zusammenhängend ist.

Beispiele

- Glatte Quartiken in $\mathbf{P}^3$
- Glatte vollständige Durchschnitte einer Quadrik und einer Kubik in $\mathbf{P}^4$
- Glatte vollständige Durchschnitte dreier Quadriken in $\mathbf{P}^5$
- Zweiblättrige Überlagerungen des $\mathbf{P}^2$, verzweigt in einer Sextik

Definition und Beispiele

Definition ($K3$-Fläche)

Eine *$K3$-Fläche* ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2, die

- eine nirgends verschwindende, holomorphe 2-Form besitzt,
- einfach zusammenhängend ist.

Beispiele

- Glatte Quartiken in $\mathbf{P}^3$
- Glatte vollständige Durchschnitte einer Quadrik und einer Kubik in $\mathbf{P}^4$
- Glatte vollständige Durchschnitte dreier Quadriken in $\mathbf{P}^5$
- Zweiblättrige Überlagerungen des $\mathbf{P}^2$, verzweigt in einer Sextik
- Kummer-Flächen:
  Desingularisierung von $A/\sim$, wobei A abelsche Fläche und $x \sim -x$.

Einordnung in die Flächenklassifikation

Klassifikation der algebraischen Flächen (Enriques)

Kodaira-Dimension

- $-\infty$
  Rationale und Regelflächen

Einordnung in die Flächenklassifikation

Klassifikation der algebraischen Flächen (Enriques)

Kodaira-Dimension

- $-\infty$
  Rationale und Regelflächen
- 0
  Abelsche Flächen, Bielliptische Flächen, **K3-Flächen**, Enriques-Flächen

Einordnung in die Flächenklassifikation

Klassifikation der algebraischen Flächen (Enriques)

Kodaira-Dimension

- $-\infty$
  Rationale und Regelflächen
- 0
  Abelsche Flächen, Bielliptische Flächen, **K3-Flächen**, Enriques-Flächen
- 1
  Elliptische Flächen

Einordnung in die Flächenklassifikation

Klassifikation der algebraischen Flächen (Enriques)

Kodaira-Dimension

- $-\infty$
  Rationale und Regelflächen
- 0
  Abelsche Flächen, Bielliptische Flächen, **K3-Flächen**, Enriques-Flächen
- 1
  Elliptische Flächen
- 2
  Flächen vom allgemeinen Typ

Einordnung in die Flächenklassifikation II

Bemerkungen

1. Die Existenz einer nirgends verschwindenden holomorphen 2-Form ($K = 0$) impliziert Kodaira-Dimension 0.

Einordnung in die Flächenklassifikation II

Bemerkungen

1. Die Existenz einer nirgends verschwindenden holomorphen 2-Form ($K = 0$) impliziert Kodaira-Dimension 0.
2. Wirklich $K = 0$ haben nur die abelschen Flächen und die $K3$-Flächen.

Einordnung in die Flächenklassifikation II

Bemerkungen

1. Die Existenz einer nirgends verschwindenden holomorphen 2-Form ($K = 0$) impliziert Kodaira-Dimension 0.
2. Wirklich $K = 0$ haben nur die abelschen Flächen und die $K3$-Flächen.
3. Der einfache Zusammenhang unterscheidet diese beiden Klassen.

19 Moduli

- Quartiken im $\mathbf{P}^3$ haben $\binom{7}{3} = 35$ Koeffizienten, bilden also einen $\mathbf{P}^{34}$. $\mathbf{Aut}(\mathbf{P}^3) = \mathbf{PGL}_4(\mathbb{C})$ von Dimension 15.

$$34 - 15 = 19$$

19 Moduli

- Quartiken im $\mathbf{P}^3$ haben $\binom{7}{3} = 35$ Koeffizienten, bilden also einen $\mathbf{P}^{34}$.
  $\mathbf{Aut}(\mathbf{P}^3) = \mathbf{PGL}_4(\mathbb{C})$ von Dimension 15.

$$34 - 15 = 19$$

- Ebene Sextiken haben $\binom{8}{2} = 28$ Koeffizienten, bilden also einen $\mathbf{P}^{27}$.
  $\mathbf{Aut}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{PGL}_3(\mathbb{C})$ von Dimension 8.

$$27 - 8 = 19$$

19 Moduli

- Quartiken im $\mathbf{P}^3$ haben $\binom{7}{3} = 35$ Koeffizienten, bilden also einen $\mathbf{P}^{34}$. $\mathbf{Aut}(\mathbf{P}^3) = \mathbf{PGL}_4(\mathbb{C})$ von Dimension 15.

$$34 - 15 = 19$$

- Ebene Sextiken haben $\binom{8}{2} = 28$ Koeffizienten, bilden also einen $\mathbf{P}^{27}$. $\mathbf{Aut}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{PGL}_3(\mathbb{C})$ von Dimension 8.

$$27 - 8 = 19$$

- Wir können ebenso die Grad-6 und Grad-8-Fälle rechnen. Es wird wieder Dimension 19 herauskommen.

19 Moduli II

Die regulären Flächen mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null *hängen von 19 Moduln und der ganzen Zahl* π (dem Mindestgeschlecht der auf ihr liegenden Kurven) *ab*. ...

Francesco Severi: Die Geometrie auf einer algebraischen Fläche (1922)

Kann man Severis Behauptung mit moderneren Mitteln bestätigen?

Kohomologie:

$$\begin{aligned}
\dim H^0(S,\mathbb{R}) &= 1,\\
\dim H^1(S,\mathbb{R}) &= 0,\\
\dim H^2(S,\mathbb{R}) &= 22,\\
\dim H^3(S,\mathbb{R}) &= 0,\\
\dim H^4(S,\mathbb{R}) &= 1.
\end{aligned}$$

Das Cup-Produkt auf $H^2(S,\mathbb{R})$ hat Signatur $(3,19)$.

Das Gitter $H^2(S,\mathbb{Z})$ ist für alle $K3$-Flächen gleich:

$$H^2(S,\mathbb{Z}) \cong (-E_8) \oplus (-E_8) \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} =: \Lambda.$$

Hodge-Diamant:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Insbesondere ist also $H^2(S, \mathbb{C}) = H^{02}(S) \oplus H^{11}(S) \oplus H^{20}(S)$ mit

$$\dim H^{02}(S) = H^{20}(S) = 1 \text{ und } \dim H^{11}(S) = 20.$$

Bemerkung

Es kann also lediglich die Lage dieser Unterräume zum Gitter $H^2(S, \mathbb{Z})$ variieren.

Deformationstheorie

Theorem (Kodaira/Spencer, 1958)

Sei S eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit.

1. *Deformationen 1. Ordnung von S werden beschrieben durch $H^1(S, \mathbf{T}_S)$.*
2. *Die Hindernisse gegen die Fortsetzung der Deformationen liegen in $H^2(S, \mathbf{T}_S)$.*

Deformationstheorie

Theorem (Kodaira/Spencer, 1958)

Sei S eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit.

1. *Deformationen 1. Ordnung von S werden beschrieben durch $H^1(S, \mathbf{T}_S)$.*
2. *Die Hindernisse gegen die Fortsetzung der Deformationen liegen in $H^2(S, \mathbf{T}_S)$.*

Ist S eine $K3$-Fläche, dann hat man die nichtausgeartete Paarung

$$\wedge : \Omega_S \times \Omega_S \longrightarrow \Omega_S^{\wedge 2} \cong \mathbb{C}$$

und damit $\Omega_S \cong \mathbf{T}_S$.

Deformationstheorie II

Folglich

$$\begin{aligned}\dim H^1(S, \mathbf{T}_S) &= \dim H^1(S, \Omega_S) = 20,\\ \dim H^2(S, \mathbf{T}_S) &= \dim H^2(S, \Omega_S) = 0.\end{aligned}$$

S hat somit eine universelle Deformation über $\mathbf{Spec}\,\mathbb{C}[[T_1, \ldots, T_{20}]]$, einem 20-dimensionalen Raumkeim.

Diese lässt sich auf einen Polyzylinder $\mathbf{D}^{20}$ fortsetzen. Eine solche Familie heißt *Kuranishi-Familie*.

Deformationstheorie II

Folglich

$$\begin{aligned}\dim H^1(S, \mathbf{T}_S) &= \dim H^1(S, \Omega_S) = 20,\\ \dim H^2(S, \mathbf{T}_S) &= \dim H^2(S, \Omega_S) = 0.\end{aligned}$$

S hat somit eine universelle Deformation über $\mathbf{Spec}\,\mathbb{C}[[T_1, \ldots, T_{20}]]$, einem 20-dimensionalen Raumkeim.

Diese lässt sich auf einen Polyzylinder $\mathbf{D}^{20}$ fortsetzen. Eine solche Familie heißt *Kuranishi-Familie*.

Problem

Wie ist der Widerspruch zu Severis Aussage zu erklären?

Die Periodenabbildung

Rigidifizierung

Eine $K3$-Fläche S zusammen mit einem Isomorphismus $\iota\colon H^2(S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Lambda$ nennt man *markierte* $K3$-Fläche.

Die Periodenabbildung

Rigidifizierung

Eine $K3$-Fläche S zusammen mit einem Isomorphismus $\iota\colon H^2(S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Lambda$ nennt man *markierte* $K3$-Fläche.

S hat ausgezeichnete holomorphe 2-Form ω, eindeutig bis auf Skalierung. Die komplexe Struktur definiert also:

Gerade $[\omega] \subset \Lambda_{\mathbb{C}}$ und damit Punkt $\tau_{(S,\iota)} \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \cong \mathbf{P}^{21}$.

Definition

$\tau_{(S,\iota)}$ heißt der *Periodenpunkt* zur markierten $K3$-Fläche (S,ι).

Die Periodenabbildung

Rigidifizierung

Eine $K3$-Fläche S zusammen mit einem Isomorphismus $\iota\colon H^2(S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Lambda$ nennt man *markierte* $K3$-Fläche.

S hat ausgezeichnete holomorphe 2-Form ω, eindeutig bis auf Skalierung. Die komplexe Struktur definiert also:

Gerade $[\omega] \subset \Lambda_{\mathbb{C}}$ und damit Punkt $\tau_{(S,\iota)} \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \cong \mathbf{P}^{21}$.

Definition

$\tau_{(S,\iota)}$ heißt der *Periodenpunkt* zur markierten $K3$-Fläche (S,ι).

Beobachtung

Es gibt keine holomorphen 4-Formen auf einer Fläche, also $\omega \wedge \omega = 0$. Folglich liegen alle Periodenpunkte auf einer glatten Quadrik $Q \subset \mathbf{P}^{21}$.

Die Periodenabbildung II

1. Ist $\pi\colon \mathscr{S} \to B$ eine Familie von $K3$-Flächen, dann induzieren die Periodenabbildungen eine *holomorphe* Abbildung

$$\tau\colon B \longrightarrow Q.$$

Die Periodenabbildung II

1. Ist $\pi\colon \mathscr{S} \to B$ eine Familie von $K3$-Flächen, dann induzieren die Periodenabbildungen eine *holomorphe* Abbildung
$$\tau\colon B \longrightarrow Q.$$
2. Ist $\pi\colon \mathscr{S} \to \mathbf{D}^{20}$ eine Kuranishi-Familie, dann ist $\tau\colon \mathbf{D}^{20} \longrightarrow Q$ biholomorph nahe $(0,\ldots,0)$. (Lokales Torelli-Theorem)

Die Periodenabbildung II

1. Ist $\pi\colon \mathscr{S} \to B$ eine Familie von $K3$-Flächen, dann induzieren die Periodenabbildungen eine *holomorphe* Abbildung
$$\tau\colon B \longrightarrow Q.$$
2. Ist $\pi\colon \mathscr{S} \to \mathbf{D}^{20}$ eine Kuranishi-Familie, dann ist $\tau\colon \mathbf{D}^{20} \longrightarrow Q$ biholomorph nahe $(0, \ldots, 0)$. (Lokales Torelli-Theorem)
3. Durch Verkleben der Kuranishi-Familien erhält man eine universelle Familie markierter $K3$-Flächen.

Die Periodenabbildung II

1. Ist $\pi\colon \mathscr{S} \to B$ eine Familie von $K3$-Flächen, dann induzieren die Periodenabbildungen eine *holomorphe* Abbildung
$$\tau\colon B \longrightarrow Q.$$
2. Ist $\pi\colon \mathscr{S} \to \mathbf{D}^{20}$ eine Kuranishi-Familie, dann ist $\tau\colon \mathbf{D}^{20} \longrightarrow Q$ biholomorph nahe $(0, \dots, 0)$. (Lokales Torelli-Theorem)
3. Durch Verkleben der Kuranishi-Familien erhält man eine universelle Familie markierter $K3$-Flächen.

Fakten

1. *Der Modulraum M aller markierten $K3$-Flächen überlagert Q also lokal biholomorph. M ist aber nicht hausdorffsch. (Atiyah 1958)*
2. *$K3$-Flächen mit demselben Periodenpunkt sind abstrakt isomorph. (Globales Torelli-Theorem, Schafarewitsch/Piatetskij-Shapiro 1971)*
3. *Das Bild in Q wird gegeben durch die Bedingung $\omega \wedge \overline{\omega} > 0$.*

Geradenbündel

Die Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathscr{O}_S \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}_S^* \longrightarrow 0$$

induziert eine exakte Sequenz

$$0 = H^1(S, \mathscr{O}_S) \longrightarrow \mathbf{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Fakt

Ist S eine $K3$-Fläche, so erlaubt jedes topologische Geradenbündel auf S höchstens eine holomorphe Struktur.

Geradenbündel

Die Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathscr{O}_S \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}_S^* \longrightarrow 0$$

induziert eine exakte Sequenz

$$0 = H^1(S, \mathscr{O}_S) \longrightarrow \mathbf{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Fakt

Ist S eine $K3$-Fläche, so erlaubt jedes topologische Geradenbündel auf S höchstens eine holomorphe Struktur.

Fakt (Lefschetz' Theorem über (1,1)-Klassen)

Es gilt

$$\mathbf{Pic}(S) = H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{11}(X).$$

Geradenbündel II

Folgerung-Definition

Für eine $K3$-Fläche S ist damit

$$\mathbf{Pic}(S) = \mathbb{Z}^k$$

für $k = 0, \ldots, 20$.

k heißt der *Picard-Rang* von S.

Geradenbündel II

Folgerung-Definition

Für eine $K3$-Fläche S ist damit

$$\mathbf{Pic}(S) = \mathbb{Z}^k$$

für $k = 0, \ldots, 20$.

k heißt der *Picard-Rang* von S.

Bemerkung

Die algebraische Geometrie untersucht vorzugsweise projektive Mannigfaltigkeiten, $S \subset \mathbf{P}^N$. In dieser Situation ist

$$\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S) \geq 1.$$

Es gibt die Einschränkung des tautologischen Geradenbündels auf $\mathbf{P}^N$.

Geradenbündel und Periodenabbildung

- Seien $\omega_0 \in \Omega^{\wedge 2}(S)$ eine holomorphe 2-Form und $\omega \in H^2(S, \mathbb{C})$ ihre Kohomologieklasse. Diese definiert

$$H^{20}(S) = \langle \omega \rangle, \qquad H^{02}(S) = \langle \overline{\omega} \rangle, \qquad H^{11}(S) = \big(H^{20}(S) \oplus H^{02}(S)\big)^{\perp}.$$

Geradenbündel und Periodenabbildung

- Seien $\omega_0 \in \Omega^{\wedge 2}(S)$ eine holomorphe 2-Form und $\omega \in H^2(S, \mathbb{C})$ ihre Kohomologieklasse. Diese definiert

$$H^{20}(S) = \langle \omega \rangle, \qquad H^{02}(S) = \langle \overline{\omega} \rangle, \qquad H^{11}(S) = \big(H^{20}(S) \oplus H^{02}(S)\big)^{\perp}.$$

- Sei weiterhin $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z})$ Chernklasse eines holomorphen Geradenbündels. Dann ist $\alpha \in H^{11}(S)$, also

$$\alpha \cup \omega = 0.$$

Geradenbündel und Periodenabbildung

- Seien $\omega_0 \in \Omega^{\wedge 2}(S)$ eine holomorphe 2-Form und $\omega \in H^2(S, \mathbb{C})$ ihre Kohomologieklasse. Diese definiert

$$H^{20}(S) = \langle \omega \rangle, \qquad H^{02}(S) = \langle \overline{\omega} \rangle, \qquad H^{11}(S) = \big(H^{20}(S) \oplus H^{02}(S)\big)^{\perp}.$$

- Sei weiterhin $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z})$ Chernklasse eines holomorphen Geradenbündels. Dann ist $\alpha \in H^{11}(S)$, also

$$\alpha \cup \omega = 0.$$

Dies ist eine *lineare Gleichung* für ω. Die Periodenquadrik Q wird mit einer Hyperebene geschnitten.

Geradenbündel und Periodenabbildung II

Folgerung

1. *Die Bedingung, dass* $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z})$ *Chernklasse eines holomorphen Geradenbündels ist, liefert eine 19-dimensionale Untervarietät*

$$Q_\alpha \subset Q.$$

Geradenbündel und Periodenabbildung II

Folgerung

1. *Die Bedingung, dass* $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z})$ *Chernklasse eines holomorphen Geradenbündels ist, liefert eine 19-dimensionale Untervarietät*

$$Q_\alpha \subset Q.$$

2. *Insgesamt besteht*

$$\bigcup_{\alpha \in H^2(S,\mathbb{Z})} Q_\alpha$$

also aus abzählbar vielen 19-dimensionalen Komponenten.

Geradenbündel und Periodenabbildung II

Folgerung

1. *Die Bedingung, dass* $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z})$ *Chernklasse eines holomorphen Geradenbündels ist, liefert eine 19-dimensionale Untervarietät*

$$Q_\alpha \subset Q.$$

2. *Insgesamt besteht*

$$\bigcup_{\alpha \in H^2(S,\mathbb{Z})} Q_\alpha$$

also aus abzählbar vielen 19-dimensionalen Komponenten.

Bemerkung

Für $K3$-Flächen vom Picard-Rang $\geq k$ haben wir also eine Modulvarietät, die aus abzählbar vielen Komponenten der Dimension $20 - k$ besteht.

Explizite Beispiele

Theoretisch gilt also:

- Die generische (projektive) $K3$-Fläche hat Picard-Rang 1.
- Beispiele mit hohen Picard-Rängen sind selten.

Explizite Beispiele

Theoretisch gilt also:

- Die generische (projektive) $K3$-Fläche hat Picard-Rang 1.
- Beispiele mit hohen Picard-Rängen sind selten.

Praktisch scheint es nahezu umgekehrt zu sein.

Bemerkung

U. Persson (1983) hat viele Beispiele von $K3$-Flächen vom Picard-Rang 20 konstruiert.

Explizite Beispiele II

Beispiel

Die Diagonalquartik, gegeben durch

$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 0$$

in $\mathbf{P}^3$, hat Picard-Rang 20.

Explizite Beispiele II

Beispiel

Die Diagonalquartik, gegeben durch

$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 0$$

in $\mathbf{P}^3$, hat Picard-Rang 20.

Es gibt auf dieser Fläche die 16 Geraden

$$\left| \begin{array}{rcl} x & = & \zeta_8 i^a y \\ z & = & \zeta_8 i^b w \end{array} \right|$$

für $a, b = 0, 1, 2, 3$ und analoge für die übrigen Partitionierungen von $\{x, y, z, w\}$. Insgesamt also 48 Geraden.

Die 48×48-Schnittmatrix hat Rang 20.

Explizite Beispiele III

Bemerkung

Explizite Beispiele von $K3$-Flächen von Picard-Rang 1 wurden erst 2005 durch R. van Luijk konstruiert.

Beispiel (van Luijk 2005)

Die Quartik in $\mathbf{P}^3$, gegeben durch

$$x^3w-3x^2y^2+4x^2yz-x^2z^2+x^2zw-xy^2z-xyz^2+xw^3+y^2z^2+y^3w+z^3w=0$$

hat Picard-Rang 1.

Explizite Beispiele IV

Beispiel (Elsenhans+J. 2007)

1. Die zweiblättrige Überlagerung des $\mathbf{P}^2$, gegeben durch

$$\begin{aligned} w^2 = {} & 11x^5y+7x^5z+x^4y^2+5x^4yz+7x^4z^2+7x^3y^3+10x^3y^2z+5x^3yz^2 \\ & +4x^3z^3+6x^2y^4+5x^2y^3z+10x^2y^2z^2+5x^2yz^3+5x^2z^4+11xy^5 \\ & +5xy^3z^2+12xz^5+9y^6+5y^4z^2+10y^2z^4+4z^6, \end{aligned}$$

hat Picard-Rang 1.

Explizite Beispiele IV

Beispiel (Elsenhans+J. 2007)

1. Die zweiblättrige Überlagerung des $\mathbf{P}^2$, gegeben durch

$$\begin{aligned} w^2 = {} & 11x^5y+7x^5z+x^4y^2+5x^4yz+7x^4z^2+7x^3y^3+10x^3y^2z+5x^3yz^2 \\ & +4x^3z^3+6x^2y^4+5x^2y^3z+10x^2y^2z^2+5x^2yz^3+5x^2z^4+11xy^5 \\ & +5xy^3z^2+12xz^5+9y^6+5y^4z^2+10y^2z^4+4z^6, \end{aligned}$$

   hat Picard-Rang 1.

2. Dagegen hat

$$\begin{aligned} w^2 = {} & [xy(2x+y)]^2 \\ & +(y+2z)(x^5+2x^4y+x^4z+3x^3y^2+4x^3yz+2x^3z^2+xy^4+3xy^3z \\ & +4xy^2z^2+2xyz^3+xz^4+4y^5+2y^4z+y^3z^2+3y^2z^3+4yz^4+2z^5) \end{aligned}$$

   Picard-Rang 2.

Untere Schranke im Beispiel 2:

1. Gerade $\ell :=$ „$y + 2z = 0$“ ist *Tritangente* an die Verzweigungssextik.

Explizite Beispiele V

Untere Schranke im Beispiel 2:

1. Gerade $\ell :=$ „$y + 2z = 0$“ ist *Tritangente* an die Verzweigungssextik.
2. $\pi^{-1}(\ell)$ besteht aus zwei Komponenten $w = \pm xy(2x + y)$.

Explizite Beispiele V

Untere Schranke im Beispiel 2:

1. Gerade $\ell :=$ „$y + 2z = 0$“ ist *Tritangente* an die Verzweigungssextik.
2. $\pi^{-1}(\ell)$ besteht aus zwei Komponenten $w = \pm xy(2x + y)$.
3. Schnittmatrix
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
hat Rang 2.

Explizite Beispiele VI

Obere Schranke: Charakteristik-p-Methoden

1. Für jede Primzahl p gilt $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S) \leq \mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p})$.

Explizite Beispiele VI

Obere Schranke: Charakteristik-p-Methoden

1. Für jede Primzahl p gilt $\mathbf{rk\,Pic}(S) \leq \mathbf{rk\,Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p})$.
2. Auch in Charakteristik p gibt es die Chernklasse

$$c_1 \colon \mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \stackrel{\subseteq}{\longrightarrow} H^2_{\acute{e}t}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_l(1)).$$

Frob: $H^2_{\acute{e}t}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_l(1)) \to H^2_{\acute{e}t}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_l(1))$ hat 22 Eigenwerte.

Auf dem invarianten Unterraum $c_1(\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}))$ kommen nur Einheitswurzeln als Frobenius-Eigenwerte vor.

Explizite Beispiele VI

Obere Schranke: Charakteristik-p-Methoden

1. Für jede Primzahl p gilt $\textbf{rk}\,\textbf{Pic}(S) \leq \textbf{rk}\,\textbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p})$.
2. Auch in Charakteristik p gibt es die Chernklasse

$$c_1\colon\ \textbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \xrightarrow{\subseteq} H^2_{\acute{e}t}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_l(1)).$$

   $\textbf{Frob}\colon H^2_{\acute{e}t}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_l(1)) \to H^2_{\acute{e}t}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_l(1))$ hat 22 Eigenwerte.

   Auf dem invarianten Unterraum $c_1(\textbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p}))$ kommen nur Einheitswurzeln als Frobenius-Eigenwerte vor.
3. Bestimmung der Frobenius-Eigenwerte nach der Lefschetzschen Spurformel:

$$\#S(\mathbb{F}_{p^k}) = 1 + p^{2k} + p^k(\lambda_1^k + \ldots + \lambda_{22}^k) = 1 + p^{2k} + p^k \sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}).$$

   Also müssen wir Punkte zählen.

Explizite Beispiele VII

Fakt (Newtons Identität)

$$s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k+r+1} \sigma_{k-r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}) s_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22})$$

liefert die elementarsymmetrischen Funktionen in $\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}$.

Explizite Beispiele VII

Fakt (Newtons Identität)

$$s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k+r+1} \sigma_{k-r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}) s_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22})$$

liefert die elementarsymmetrischen Funktionen in $\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}$.

Bemerkung

Die Poincaré-Dualität sorgt dafür, dass es ausreicht, über den Körpern $\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_{p^2}, \ldots, \mathbb{F}_{p^{11}}$ Punkte zu zählen.

Explizite Beispiele VII

Fakt (Newtons Identität)

$$s_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k+r+1} \sigma_{k-r}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}) s_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{22})$$

liefert die elementarsymmetrischen Funktionen in $\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}$.

Bemerkung

Die Poincaré-Dualität sorgt dafür, dass es ausreicht, über den Körpern $\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_{p^2}, \ldots, \mathbb{F}_{p^{11}}$ Punkte zu zählen.

Bemerkung

Die Frobenius-Eigenwerte erscheinen als Paare konjugiert komplexer Zahlen. Deshalb liefert diese Methode nur gerade Zahlen als obere Schranken.

Für $\mathbf{rk\,Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_p})$ sind diese Schranken nach der Tate-Vermutung scharf.

Explizite Beispiele VIII

Strategie (um Picard-Rang 1 zu beweisen)

- Arbeite mit zwei Primzahlen (3 und 5).
- Zeige Oberschranken $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_3}) \leq 2$ und $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_5}) \leq 2$.

Explizite Beispiele VIII

Strategie (um Picard-Rang 1 zu beweisen)

- Arbeite mit zwei Primzahlen (3 und 5).
- Zeige Oberschranken $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_3}) \leq 2$ und $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_5}) \leq 2$.
- Sichere Gleichheit durch explizite Divisoren:

  Bei $S_{\overline{\mathbb{F}}_5}$ eine Tritangente an die Verzweigungssextik,
  bei $S_{\overline{\mathbb{F}}_3}$ ein in 6 Punkten tangentialer Kegelschnitt.

  Dies liefert die Schnittmatrizen

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},$$

  also die Diskriminanten (-5) und (-32).

Explizite Beispiele VIII

Strategie (um Picard-Rang 1 zu beweisen)

- Arbeite mit zwei Primzahlen (3 und 5).
- Zeige Oberschranken $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_3}) \leq 2$ und $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_5}) \leq 2$.
- Sichere Gleichheit durch explizite Divisoren:

  Bei $S_{\overline{\mathbb{F}}_5}$ eine Tritangente an die Verzweigungssextik,
  bei $S_{\overline{\mathbb{F}}_3}$ ein in 6 Punkten tangentialer Kegelschnitt.

  Dies liefert die Schnittmatrizen

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},$$

  also die Diskriminanten (-5) und (-32).
- Wäre nun $\mathbf{rk}\,\mathbf{Pic}(S) = 2$, dann müsste $\mathbf{Pic}(S)$ Untergitter von endlichem Index in beiden, $\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_3})$ und $\mathbf{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}_3})$ sein. Damit wären $\frac{\mathbf{disc}\,\mathbf{Pic}(S)}{-5}$ und $\frac{\mathbf{disc}\,\mathbf{Pic}(S)}{-32}$ Quadratzahlen in $\mathbb{Q}$.