# Die Vergrößerung des eigenen Spiegelbilds im Kosmetikspiegel

von Jürgen Hattenbach

Mail an den Autor senden

zuletzt geändert am 14. Oktober 2018

## *Zusammenfassung*

Die Berechnung der Vergrößerung eines Hohlspiegels, wie er häufig als Schminkspiegel, Rasierspiegel oder für andere kosmetische Zwecke benutzt wird, ist nicht trivial. Bei der Betrachtung des eigenen Spiegelbildes wird analog der Vergrößerung einer Lupe vorgegangen. Es wird der Bezug zum größten eigenen Spiegelbild im Planspiegel hergestellt, das sich in der deutlichen Sehweite von 25 $cm$, der kleinsten Sehweite eines Normalsichtigen, befindet.

Befindet sich das eigene Auge genau in der Brennebene eines Hohlspiegels, so erscheint das Spiegelbild im Unendlichen. Die reflektierten Strahlen sind zueinander parallel und können mit entspanntem Auge scharf gesehen werden. Für einen Spiegel mit der Brennweite $f$ in $cm$ beträgt die Vergrößerung dann (wie bei einer Lupe) $V_{min} = \frac{25}{f}$.

Diese Vergrößerung kann nicht unterschritten werden, weil man bei größerem Abstand als der Brennweite kein aufrechtes, virtuelles Bild mehr erhält. Dies schränkt die Bewegungsfreiheit bei Tätigkeiten vorm Hohlspiegel gegenüber dem Planspiegel stark ein.

Nähert sich der Betrachter dem Hohlspiegel innerhalb der Brennweite weiter, so wird das Spiegelbild virtuell und rückt näher. Bei der Sehweite von 25 $cm$ ist die maximale Vergrößerung erreicht. Für beispielsweise $f = 12{,}5\ cm$ wird $V_{max} \approx 2{,}4$ erreicht. Da sich der Betrachter innerhalb der Brennweite befindet, aber zwischen ihm und der Spiegeloberfläche noch Platz für die kosmetische Tätigkeit bleiben muss, haben viele Kosmetikspiegel Brennweiten zwischen 30 $cm$ und 50 $cm$ und erreichen damit maximale Vergrößerungen von kaum 1,5. Die exakte Berechnungen von $V_{max}$ und dem zugehörenden Spiegelabstand werden hier vorgestellt. (Alle im Text angegebenen Links führen zur Wikipedia.)

## *Grundlegendes*

Beim Blick in einen Hohlspiegel aus mehr als der doppelten Brennweite sieht man ein umgekehrtes reelles Bild, das sich vor dem Spiegel zwischen einfacher und doppelter Brennweite befindet.
Nähert man sich auf weniger als die doppelte Brennweite, so wandern die reellen Bilder hinter den Betrachter, er nimmt dann konvergente Strahlen aus Richtung des Spiegels unscharf wahr.
Erst wenn der Betrachter innerhalb der Brennweite steht, werden die reflektierten Strahlen divergent und können als virtuelles Bild scharf gesehen werden. Die Annäherung endet, wenn die minimale Sehweite zum Spiegelbild erreicht ist.
Zur Bestimmung von Vergrößerungen ist ein Bezug notwendig. Bei Teleskopen und Ferngläsern ist dies der Sehwinkel ohne Hilfsmittel, die Entfernung zum Objekt ist ja nicht wählbar.
Bei Lupen und Mikroskopen bezieht man sich auf den Sehwinkel ohne Hilfsmittel bei der deutlichen Sehweite, das Objekt kann ja frei positioniert werden. Die kleinste Sehweite ist zwar individuell, um aber objektiv Vergrößerungen bestimmen zu können, gilt die deutliche Sehweite von 25 $cm$ als das Normal.

## *Strahlengänge*

Im Folgenden steht die Gegenstandsgröße $G$ – symbolisiert durch einen schwarzen Pfeil – für die Ausdehnung des eigenen Auges, gemessen von der Pupillenmitte auf der optischen Achse bis beispielsweise zur Augenbraue. Die Bildgröße $B$ beschreibt das virtuelle Spiegelbild.

Die Gegenstandsweite $g$ ist der Abstand vom Auge zum Spiegel, die Bildweite $b$ der scheinbare Abstand des Spiegelbilds hinter dem Spiegel. Die Sehweite $s = g + b$ ist die scheinbare Entfernung, auf die das Auge scharfgestellt wird (alle Größen sind positiv gewählt).

In den Abbildungen 1, 2 und 3 sind jeweils ein achsparalleler Strahl in rot und ein Mittelpunktstrahl in grün dargestellt – beide mit ihren Reflektionen und virtuellen Verlängerungen.

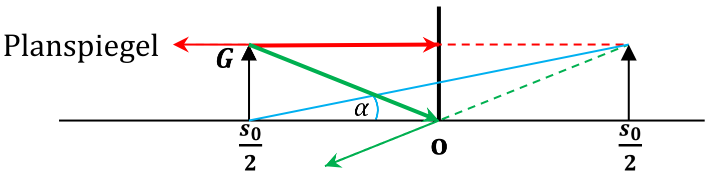
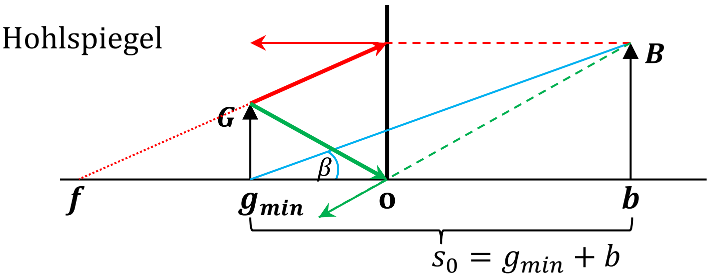



Bild und Gegenstand haben dieselbe Größe. Bild- und Gegenstandsweite sind gleich. Der größte Sehwinkel wird bei der deutlichen Sehweite $s_0$ erreicht, also beim kleinstmöglichen Abstand $\frac{s_0}{2}$.

Dann gilt $\tan \propto = \frac{G}{s_0}$.




Ein virtuelles Bild entsteht nur für $g < f$. Der rote Strahl kommt aus der Richtung des Brennpunkts und wird achsparallel reflektiert. Die Annäherung an den Hohlspiegel endet bei der deutlichen Sehweite $s_0$. Der dazu notwendige Abstand $g_{min}$und der Sehwinkel $\beta$ werden später berechnet.

**Abbildungen 1 und 2**: Vergleich von Plan- und Hohlspiegel bei gleicher deutlicher Sehweite $s_0$. Wegen der identisch gewählten Position von $G$ sind die Spiegelpositionen (**o**) gegeneinander verschoben.

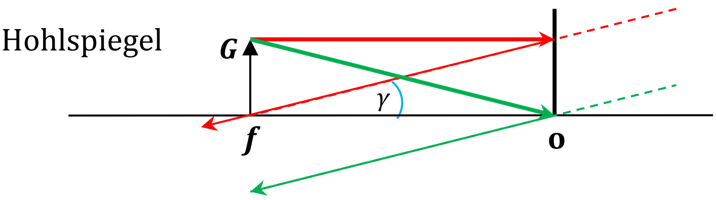



**Abbildung 3**: Betrachter in der Brennebene

Steht der Betrachter $G$ in der Brennebene bei $f$, so wachsen Bildgröße und -weite über alle Grenzen, die reflektierten Strahlenbündel sind parallel und können mit entspanntem Auge scharf gesehen werden.

Dann gilt $\tan \gamma = \frac{G}{f}$.

### *Vergrößerungen*

Bei nicht reellen Bildern kann nur sinnvoll die Winkelvergrößerung als Quotient zweier Tangens dienen.

Eine einfache Anordnung für den Größenvergleich stellt beide Spiegel so nebeneinander, dass sie aus gleichem Abstand $g$ betrachtet werden können. Der größtmögliche Abstand vom Hohlspiegel ist $g = f$, diese Vergrößerung wäre $V_0 = \frac{G/f}{G/2f} = 2$ und somit unabhängig von $f$. Sie bezieht sich allerdings bei Brennweiten $f > \frac{s_0}{2}$ nicht mehr auf das größtmögliche Bild im Planspiegel.

Bei der Berechnung der Vergrößerung einer Lupe wird als Bezug der Sehwinkel des unbewaffneten Auges bei der deutlichen Sehweite $s_0$ herangezogen, also der größtmögliche Sehwinkel ohne Hilfsmittel. Beim Planspiegel entspricht das dem Abstand $g = \frac{s_0}{2}$. Der Bezug auf das größte Bild im Planspiegel wird im Weiteren verwendet, da alles andere willkürlich zu beliebigen Vergrößerungen führt.

- Der Vergleich mit dem Hohlspiegel im Abstand $g = f$, also bei entspanntem Auge, liefert nach Abbildungen 1 und 3:

  $\boldsymbol{V_{min}} = \frac{\tan\gamma}{\tan\alpha} = \frac{G/f}{G/s_0} = \boldsymbol{\frac{s_0}{f}}$. Das ist dasselbe Ergebnis wie bei einer Lupe.

- Erst wenn der Hohlspiegel so nah gebracht wird, dass auch hier $s = s_0$ gilt, werden größtmögliche Sehwinkel verglichen. Die dem entsprechende Vergrößerung bei der Lupe ist $V = \frac{s_0}{f} + 1$. Die umfangreichen Berechnungen hierzu beim Spiegel sind Inhalt dieser Abhandlung und haben zum Ergebnis:

  $\boldsymbol{V_{max}} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{4+\left(\frac{s_0}{f}\right)^2} - \frac{s_0}{f}}$ beim zu $s_0$ passenden Abstand $\boldsymbol{g_{min}} = \boldsymbol{f + \frac{s_0}{2} - \sqrt{f^2 + \left(\frac{s_0}{2}\right)^2}}$

Für $s_0 = 25\,cm$ zeigt Abbildung 4 in rot die Vergrößerungen bezogen auf das größte Bild im Planspiegel und in blau die zugehörenden Gegenstandsweiten, die den Schärfebereich begrenzen:

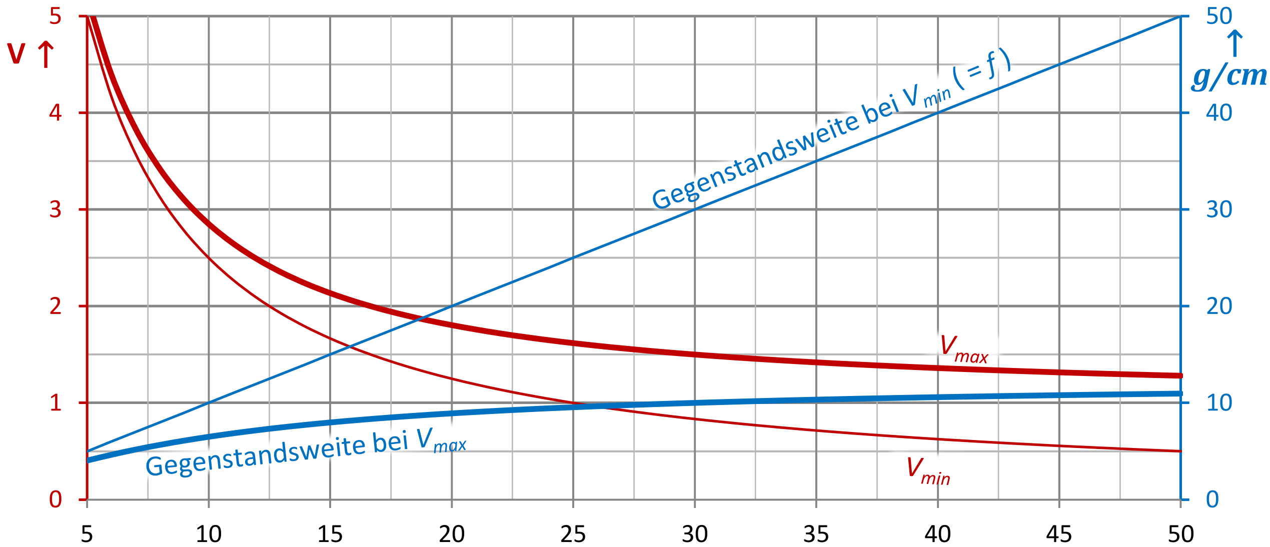
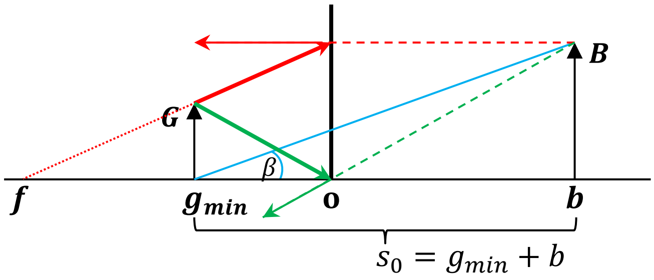



**Abbildung 4**: Vergrößerungen gegenüber dem größten Bild im Planspiegel

### *Die maximale Vergrößerung*

Zur Berechnung der Verhältnisse am Hohlspiegel bei minimaler Sehweite $s = s_0$ dient noch einmal die Abbildung 2:




Für die Bildkonstruktion werden zwei Strahlen betrachtet, die von $G$ ausgehen: Der grüne Mittelpunktstrahl wird wie beim Planspiegel reflektiert, und der rote wird achsparallel reflektiert, weil seine linksseitige Verlängerung aus dem Brennpunkt kommt. (Die Spiegelkrümmung kann für kleine $G$ vernachlässigt werden.) Die rechts des Hohlspiegels gezeigten Verlängerungen der Reflexionen schneiden sich und konstruieren so das virtuelle Bild der Größe $B$ im Abstand $b$ hinter dem Spiegel. Dem Betrachter in $g_{min}$ soll das Bild in der deutlichen Sehweite $s_0$ unter dem größten Sehwinkel $\beta$ erscheinen. Es gilt also

$\tan\beta = \frac{B}{s_0}$ für den Sehwinkel am Hohlspiegel. Dann ist

$V_{max} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{B/s_0}{G/s_0} = \frac{B}{G}$ (1) die Vergrößerung gegenüber dem Planspiegel.

Im Folgenden werden nun schrittweise alle von $f$ oder $s_0$ abhängenden Größen eliminiert, um die maximale Vergrößerung $V_{\max}$ als Funktion der Brennweite zu berechnen.

Wegen des Strahlensatzes gilt zwischen optischer Achse und dem roten Strahl

$\frac{B}{G} = \frac{f}{f-g}$ (2) und zwischen optischer Achse und den grünen Strahlen

$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ (3) Gleichsetzen von (2) und (3) eliminiert $\frac{B}{G}$ und liefert

$b = \frac{gf}{f-g}$ (4) als Bildweite abhängig von der Gegenstandsweite.

Einsetzen von (2) in (1) eliminiert auch hier $\frac{B}{G}$ und liefert

$V = \frac{f}{f-g}$ (5) als Vergrößerung abhängig von $g$.

Um $g$ zu eliminieren, wird jetzt $g(s_0)$ gesucht. Es gilt

$s_0 = g + b$ — $b$ wird durch Einsetzen von (4) eliminiert und liefert

$s_0 = g + \frac{gf}{f-g}$ — Umstellen ergibt

$(s_0 - g)(f - g) = gf$ — Multiplikation der Klammerausdrücke liefert

$s_0 f - s_0 g - gf + g^2 = gf$ — Zusammenfassen und Umstellen ergibt

$g^2 - 2gf - s_0 g = -s_0 f$ — Ausklammern liefert die quadratische Gleichung

$g^2 - (2f + s_0)g = -s_0 f$ — Die quadratische Ergänzung $\left(\frac{2f+s_0}{2}\right)^2 = \left(f + \frac{s_0}{2}\right)^2$ ergibt

$\left(g - \left(f + \frac{s_0}{2}\right)\right)^2 = \left(f + \frac{s_0}{2}\right)^2 - s_0 f$ — Die Quadratwurzel daraus liefert für $g$ die zwei Lösungen

$$g_{1,2} = f + \frac{s_0}{2} \pm \sqrt{\left(f + \frac{s_0}{2}\right)^2 - s_0 f} = f + \frac{s_0}{2} \pm \sqrt{f^2 + s_0 f + \left(\frac{s_0}{2}\right)^2 - s_0 f} = f + \frac{s_0}{2} \pm \sqrt{f^2 + \left(\frac{s_0}{2}\right)^2}$$

Unter der hier betrachteten Bedingung $g < f$ gilt nur die zweite Lösung, also

$$\boldsymbol{g_{min} = f + \frac{s_0}{2} - \sqrt{f^2 + \left(\frac{s_0}{2}\right)^2}}$$

als das gesuchte kleinste $g(s_0)$. Einsetzen in (5) liefert

$$V_{max} = \frac{f}{f - f - \frac{s_0}{2} + \sqrt{f^2 + \left(\frac{s_0}{2}\right)^2}}$$

und damit endlich die maximale Vergrößerung

$$\boldsymbol{V_{max} = \frac{f}{\sqrt{f^2 + \left(\frac{s_0}{2}\right)^2} - \frac{s_0}{2}}}$$

als Funktion von $f$. Erweitern mit $\frac{2}{f}$

$$V_{max} = \frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{s_0}{f}\right)^2} - \frac{s_0}{f}}$$

erlaubt das Ersetzen von $V_{min} = \frac{s_0}{f}$ und ergibt alternativ

$$\boldsymbol{V_{max} = \frac{2}{\sqrt{4 + V_{min}{}^2} - V_{min}}}$$

als Funktion von $V_{min}$.

Für $s_0 = 25\ cm$ erhält man ($f$ und $g_{min}$ in $cm$):

$$V_{min} = \frac{25}{f} \qquad V_{max} = \frac{f}{\sqrt{f^2 + 156{,}25} - 12{,}5} \qquad g_{min} = f + 12{,}5 - \sqrt{f^2 + 156{,}25}$$

Der Verlauf dieser nicht trivialen Funktionen wurde oben in Abbildung 4 bereits dargestellt.

Da durch handelsübliche Kosmetikspiegel mit Brennweiten von weit über 25 $cm$ nur geringe Vergrößerungen erreicht werden, liegt der eigentliche Vorteil wohl eher darin, im Abstand der Brennweite ein größeres Bild zu sehen als bei gleichem Abstand zum Planspiegel, und dies mit entspanntem Auge.

Diese zu Beginn dargestellte subjektive Vergrößerung $V_0$ ist immer 2-fach. Man sieht sich also im komfortablen Abstand doppelt so groß, aber bei $f > 25\ cm$ kleiner als in der Nahsicht vorm Planspiegel. Werbeaussagen zu Kosmetikspiegeln versprechen hingegen Vergrößerungen bis **30-fach**, ihnen fehlt allerding immer der Bezug. (Für ein willkürlich angenommenes $s_0 > 250\ cm$ wären die Aussagen wahr.)

Die folgenden Fotografien sind Spiegelbilder einer Kamera in einem Plan- und einem typischen Kosmetikspiegel mit 40 cm Brennweite. Die beiden linken Bilder demonstrieren die relative 2-fache Vergrößerung $V_0$, die drei rechten die Faktoren $V_{max}$ und $V_{\mathrm{min}}$ gegenüber dem größten Bild im Planspiegel:

| | Planspiegel weit | Hohlspiegel weit | **Planspiegel nah** | Hohlspiegel nah |
|---|---|---|---|---|
| Gegenstandsweite: | $40\ cm = f$ | $40\ cm = f = g_{max}$ | $12{,}5\ cm = \boldsymbol{\frac{s_0}{2}}$ | $11\ cm \approx g_{min}$ |
| Sehweite: | $80\ cm = 2f$ | $\infty$ | $25\ cm = \boldsymbol{s_0}$ | $25\ cm = s_0$ |
| Vergrößerung: | $0{,}3125 = \frac{V_{min}}{2}$ | $0{,}625 = V_{min}$ | **1** | $1{,}4 \approx V_{max}$ |