Versuch 5
LUFTDRUCKMESSUNG

1. Grundlagen

Der Druck in einem Gas oder in einer Flüssigkeit ist definiert als die Kraft, die das Gas oder die Flüssigkeit pro Flächeneinheit ausübt. Der Druck wirkt - unabhängig von der Orientierung der Fläche - stets senkrecht (*normal*) auf die Fläche.

Der hydrostatische Luftdruck in einer bestimmten Höhe in der Atmosphäre ist gleich dem Gewicht einer vertikalen Luftsäule mit einer definierten Grundfläche, welche sich von der betrachteten Höhe bis zur Obergrenze der Atmosphäre erstreckt. Das Gewicht der Luftsäule ist die Kraft, die sie im Schwerefeld der Erde auf die Grundfläche ausübt.

Zur Berechnung des Gewichts der Luftsäule muß man, da die Dichte der Luft (ρ_L) mit der Höhe abnimmt, die Säule in mehrere Schichten der Dicke dz zerlegen und über die Höhe der Säule aufsummieren. Das Gewicht der Schicht - und damit die durch die Schicht bewirkte Druckänderung - ist dann durch

$$dP = \rho_L \cdot g \cdot dz \qquad (5.1)$$

gegeben, wobei g die Schwerebeschleunigung ist. Dieser Zusammenhang wird als *hydrostatische Grundgleichung* bezeichnet. Die Dichte der Luft ist direkt schwer zu bestimmen, kann aber bei bekannter Temperatur und bekanntem Druck nach dem allgemeinen Gasgesetz berechnet werden:

$$\rho_L = \frac{P}{R_L \cdot T}, \qquad (5.2)$$

wobei R_L die Gaskonstante für trockene Luft ist (287,05 $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$) und T die Temperatur in K. Nimmt man vereinfachend an, daß die Temperatur innerhalb der Luftsäule konstant ist (isotherme Temperaturschichtung) bzw. linear mit der Höhe ab- bzw. zunimmt, so erhält man für den Druck am Boden der gedachten Luftsäule nach Integration:

$$P_{z_2} = P_{z_1} \cdot \exp\left[-\frac{g}{R_L \cdot \overline{T}} \cdot (z_2 - z_1) \right]. \qquad (5.3)$$

Dabei ist P_z jeweils der Druck in den Höhen z_1 und z_2 und $\overline{T}$ die mittlere Temeratur der Luftsäule.Der Luftdruck nimmt also exponentiell mit der Höhe ab (barometrische Höhenformel).

Ist die Temperaturschichtung bekannt, z.B.

$$T_{z_2} = T_{z_1} - k_P \cdot (z_2 - z_1), \qquad (5.4)$$

auch als polytrope Schichtung bezeichnet mit dem Polytropenfaktor k_P in K/m, so erhält man die Höhenformel für eine polytrope Atmosphäre:

$$P_{z_2} = P_{z_1} \cdot \left[1 - \frac{k_P}{T_{z_1}} \cdot (z_2 - z_1) \right]^{\frac{g}{R_L \cdot k_P}} \qquad (5.5)$$

Als Einheit des Luftdrucks wird heute allgemein nach dem belgischen Physiker B. Pascal die aus der Druckdefinition abgeleitete Einheit Pa verwendet. In der Meteorologie ist wegen der großen Zahlenwerte die Einheit *hPa*=100 *Pa* gebräuchlich. Häufig wird auch die ältere Einheit *mbar* verwendet. Daneben ist - vom wichtigsten Druckmeßgerät, den Quecksilberbarometer, her - noch die Einheit *Torr*, nach dem Physiker Torricelli benannt, in Gebrauch. 1 *Torr* ist der Druck, den eine Quecksilbersäule von 1 *mm* Höhe bei 0°*C* und Normalschwere (in 45° Breite und auf Meeresniveau) auf die Unterlage ausübt.

Tab. 1: Umrechnungen für verschiedene Druckeinheiten:

$$1Pa = 1\frac{N}{m^2}$$

$$1bar = 1000hPa$$

$$1Torr = 1{,}333224hPa$$

1.1 Die Reduktion des Luftdrucks auf NN

Um die Luftdruckmessungen von Stationen in verschiedenen Meereshöhen miteinander vergleichen zu können, *reduziert* man sie auf ein Standardniveau, gewöhnlich auf Meeresniveau. In den Bodenwetterkarten wird stets der reduzierte Luftdruck angegeben. Die Eintragung des tatsächlich in Stationshöhe gemessenen Druckes würde im wesentlichen zu einer Karte des Bodenreliefs führen.

Aus der barometrischen Höhenformel erhält man für die Druckkorrektur:

$$\Delta P = P_{NN} - P_z = P_{St.} \cdot \left[\exp\left(\frac{g \cdot z}{R_L \cdot \overline{T}} \right) - 1 \right] \qquad (5.6)$$

z ist die Stationshöhe über NN, $P_{St.}$ der Stationsdruck. Da die Temperatur mit der Höhe abnimmt, muß man für $\overline{T}$ einen mittleren Wert der (gedachten) Luftsäule zwischen Stationsniveau und NN ansetzen. Bei einer mittleren vertikalen Änderung der Lufttemperatur von -0,65*K*/100*m* erhält man:

$$\overline{T} = T_{St.} + 0{,}00325 \cdot z\,, \qquad (5.7)$$

wobei $T_{St.}$ die an der Station gemessenen Temperatur in *K* und z die Stationshöhe in *m* angibt.

1.2 Barometrische Höhenmessung

Aus der Messung von Druckdifferenzen lassen sich aus der barometrischen Höhenformel umgekehrt auch Höhendifferenzen berechnen. Für die Temperaturverteilung mit der Höhe werden dabei Werte der Standardatmosphäre (Temperaturabnahme=-0,65*K*/100*m*) angenommen.

Genauere Berechnungen erfordern die Kenntnis der vertikalen Temperatur- und Feuchteschichtung. Letztere beeinflußt ebenfalls die Luftdichte, da Wasserdampf leichter als trockene Luft ist (unterschiedliche Molgewichte der Gase). Zur Berücksichtigung des Wasserdampfanteils verwendet man daher die virtuelle Temperatur $T_{virt.}$. Sie ist definiert als die Temperatur, die trok??kene Luft annehmen muß, damit sie unter demselben Druck auch dieselbe Dichte hat wie die feuchte Luft:

$$T_{virt.} = T + T \cdot q \cdot \left(\frac{R_W}{R_L} - 1 \right) = T + T \cdot 0{,}608 \cdot q \tag{5.8}$$

Hierbei wird die spezifische Feuchte q in *kg/kg* und nicht in *g/kg* angegeben.
Der zweite Summand ist der virtuelle Temperaturzuschlag. Er hängt ab vom Wasserdampfgehalt. Bei Normaldruck (1013,25 *hPa*), 15°*C* und 60% relativer Luftfeuchte beträgt der Zuschlag ca. 1,1 *K*.
Bei kleinen Höhendifferenzen und Vernachlässigung von Temperaturänderung und Feuchteeinfluß kann man aus der statischen Grundgleichung eine einfache Näherung angeben:

$$\begin{aligned} \Delta z = z_2 - z_1 &= -\frac{R_L \cdot T}{g \cdot P} \Delta P \approx -8 \Delta P \\ z_2 > z_1; \Delta P &= P_{z_2} - P_{z1} \end{aligned} \tag{5.9}$$

wenn ΔP in *hPa* und Δz in *m* angegeben werden (10*m* Höhendifferenz entspricht -1.2 *hPa* Druckänderung).

1.3 Druckmeßverfahren und -korrekturen

1.3.1 Stationsbarometer

Der aus dem Gewicht der Quecksilbersäule folgende Luftdruck

$$P = \rho_g \cdot g \cdot h, \tag{5.10}$$

hängt - neben der Höhe h der Quecksilbersäule - noch von der Schwerebeschleunigung g am Stationsort und der Dichte ρ_{Hg} des Quecksilbers ab. Als Bezugsniveau für die Druckangabe wählt man einen Ort in 45° Breite auf Meereshöhe bei 0°*C* und korrigiert alle gemessenen Stationsablesungen entsprechend.
Die Dichte von Quecksilber ist im wesentlichen eine Funktion der Temperatur:

$$\rho_{Hg} = \rho_{0\,Hg} \cdot \frac{1}{1 + k_{th._{Hg}} \cdot \vartheta} \tag{5.11}$$

mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten $k_{th._{Hg}}$ von Quecksilber. Da sich aber auch der Ablesemaßstab bei Temperaturänderung verlängert oder verkürzt, muß die dadurch bewirkte Fehlablesung berücksichtigt werden. Man subtrahiert dafür den thermischen Ausdehnungskoeffizienten der Gefäßwände (Messing oder Neusilber) von dem des Quecksilbers und erhält einen effektiven Ausdehnungskoeffizienten: $k_{eff.} = 1{,}63 \cdot 10^{-4}\, K^{-1}$.

Infolge der Erdrotation wirkt außer an den Polen auf jedem Punkt der Erde eine Zentrifugalkraft, die der Schwerkraft entgegengerichtet ist. Sie besitzt am Äquator ihren größten Wert und verschwindet an den Polen. Die resultierende Schwerebeschleunigung g als die Differenz aus der reinen Schwerkraft und der Zentrifugalkraft hängt daher von der geographischen Breite des Beobachtungsortes ab. Nach der internationalen Schwereformel gilt näherungsweise:

$$\begin{aligned} g(\beta) &= 9{,}7805 \cdot \left(1 + 5{,}2884 \cdot 10^{-3} \cdot \sin^2(\beta)\right) \\ g(\beta) &= g(45°) \cdot (1 - 2{,}6442 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(2 \cdot \beta) \end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei *ß* die geographische Breite in Grad angibt. Die korrigierte Schwere *g*(*ß*) wird als Normalschwere bezeichnet. Bei 50° Breite nimmt *g* pro Kilometer um $0{,}79\cdot10^{-5}$ m/s^2 zu, wenn man sich nach Norden bewegt - zum Vergleich: *g* nimmt pro Höhenmeter um $0.31\cdot10^{-5}$ m/s^2 bei Erhebung von der Oberfläche ab.

Die Schwerebeschleunigung *g* nimmt von der Erdoberfläche mit dem Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt ab. In erster Näherung kann man in den untersten Kilometern der Atmosphäre einen linearen Abfall annehmen:

$$g(z) = g(\beta)\cdot\left(\frac{r_{Erde}}{r_{Erde}+z}\right)^2 \approx g(\beta)\cdot\left(1-3{,}147\cdot10^{-7}\left[m^{-1}\right]\cdot z\right) \qquad (5.13)$$

$$z > r_{Erde}$$

Dabei ist R_e der Erdradius und *z* die Stationshöhe.

Zusammengefaßt erhält man für die Temperatur- und Schwerekorrektur des Stationsbarometers die folgende Näherungsformel:

$$\Delta P = P_{Barom.}\cdot\left(-k_{eff.}\cdot\vartheta - 3{,}147\cdot10^{-7}\,m^{-1}\cdot z - 2{,}6442\cdot10^{-3}\cdot\cos(2\cdot\beta)\right)$$
$$P = P_{Barom.} + \Delta P \qquad (5.14)$$

1.3.2 Aneroidbarometer

Die elastischen Eigenschaften der Druckdose hängen von der Temperatur ab. Durch eine nur unvollständige Evakuierung der Dose und den Einbau eines Bimetalls in den Übertragungsmechanismus kann der Temperatureinfluß minimiert werden.

1.3.3 Siedethermometer

Der Siedepunkt reinen Wassers ϑ_{SP} hängt mit dem Luftdruck P wie folgt zusammen:

$$\vartheta_{SP} = 100{,}00 + 2{,}804\cdot10^{-2}\cdot(P-1013{,}25) - 1{,}384\cdot10^{-5}\cdot(P-1013{,}25)^2 \qquad (5.15)$$

Setzt man *P* in *hPa* ein, so ergibt sich ϑ_{SP} in *°C*.

Tab.2: Einige charakteristische Werte für die Beziehung zwischen Siedepunkt von reinem Wasser und dem Luftdruck.

P in *hPa*	850	900	950	1000	1050
ϑ_{SP} in *°C*	95,16	96,71	98,20	99,63	101,00

Bringt man ein sehr empfindliches Thermometer (Meßbereich z.B. 98 -102°*C*) in den Dampfraum über siedendem Wasser (Warum nicht in das Wasser selbst?), so kann man aus der Temperaturablesung sehr einfach den Druck ermitteln. Es werden auch Thermometer mit einer *hPa*- Einteilung verwendet, die eine direkte Ablesung des Druckes ermöglichen. Diese Druckmessungen sind genauer als die Messungen mit Dosenbarometern. Wenn das Thermometer genau anzeigt, sind keine Korrekturen erforderlich. Siedethermometer werden daher vielfach zur barometrischen Höhenmessung verwendet, so daß sie auch Hypsometer genannt werden.

1.4 Niveauflächen, Geopotential

In der Meteorologie werden die Luftdruckangaben verschiedener Stationen stets auf Niveauflächen bezogen. Charakteristisch für eine Niveaufläche ist, daß die Schwerkraft in jedem Punkt der Fläche senkrecht auf sie gerichtet ist. Die Meeresoberfläche ist z.B. eine Niveaufläche. Bei der Bewegung auf einer Niveaufläche muß keine Arbeit gegen die Schwerkraft verrichtet werden. Nur beim Wechsel von einer Niveaufläche zu einer anderen (z.B. beim Heben eines Luftpakets von Meereshöhe in eine gewisse Höhe z) wird Arbeit verrichtet. Im Niveau z besitzt das Luftpaket ein Gravitationspotential (Φ):

$$\Phi = \int g(\beta, z) \cdot dz \approx \overline{g}(\beta, z) \cdot z \,. \qquad (5.16)$$

Dieses sogenannte Geopotential besitzt auf der gesamten Niveaufläche den gleichen Wert.
Ohne Erdrotation und bei idealer homogener Massenverteilung im Erdinnern wären die Niveauflächen sphärische Schalen um den Erdmittelpunkt. Wegen der Rotationsbewegung ist die Schwere am Äquator jedoch geringer als am Pol, die Flächen gleichen Geopotentials liegen daher am Äquator höher als am Pol.
Die Einheit des Geopotentials ist als das Potential definiert, das ein Luftpaket beim Anheben um 1 *m* gegen die Schwerebeschleunigung von $g(45°)$=9,8065m/s^2 gewinnt. Mit dem geopotentiellen Standardmeter m´ als

$$1m' = 9{,}8065 \, {}^{m^2}\!/\!_{s^2} \qquad (5.17)$$

ist die Einheit eines Maßstabes definiert, mit dem Orte entsprechend ihrem Geopotential in Form einer Höhe dargestellt werden können. Diese Definition führt dazu, daß der Zahlenwert eines geopotentiellen Meters der tatsächlichen Höhe des Ortes in *m* bis auf wenige Promille entspricht. Infolge der unterschiedlichen Schwerebeschleunigung zwischen Pol und Äquator ergäbe sich für eine ansonsten identische Luftsäule in einer geometrischen Höhe von 30*km* ein Druckunterschied von z.B. +25*hPa*. Diese Druckdifferenz bewirkt jedoch keine Luftbewegung, da sich der Druck der Luftsäule entsprechend der Änderung der Schwerebeschleunigung entlang der Bewegungsrichtung an den Druck der jeweiligen Umgebung angleichen würde. Durch die Verwendung des geopotentiellen Meters wird die Wirkung der unterschiedlichen Schwerebeschleunigung aufgehoben Der in dieser Einheit angegebene Abstand verschiedener Druckflächen, den sogenannten *Isobaren,* hängt dann nur noch von der mittleren virtuellen Temperatur ab. In den Wetterkarten wird die Höhe stets als geopotentielle Höhe angegeben. Aus dem Abstand der Flächen gleichen Geopotentials, den sogenannten *Isohypsen*, kann direkt die Druck-Gradientkraft bestimmt werden und daraus der geostrophische Wind (vgl. Literaturangaben).

Literatur:

F. Möller(1984): Einführung in die Meteorologie, Bd.1; BI-Hochschultaschenbücher.
G.Liljequist, K.Cehak (1984): Allgemeine Meteorologie. 3. Auflage. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 396 S..

Versuchsbeschreibung:

Zubehör: Stations-Quecksilberbarometer, Barograph, Dosenbarometer, Siedebarometer, Psychrometer.

Gang des Versuchs:

- Siedebarometer zusammenbauen, Wasser einfüllen und beheizen. Einige Minuten nach Beginn des Siedens Thermometer ablesen.
- Dosenbarometer leicht klopfen und Druck ablesen.
- Luftdruckbestimmung mit dem Stations-Barometer: Gerätetemperatur am Thermometer des Stationsbarometers bestimmen. Der verstellbare Ring am Barometer wird von oben langsam heruntergedreht, bis die Ringkante das oberste Meniskusende berührt. Nun die Höhe der Quecksilbersäule mit dem Nonius auf 0,1 *Torr* genau ablesen. Dann den Ring auf die Unterkante des Meniskus einstellen und ablesen. Der Mittelwert beider Ablesungen gibt den tatsächlichen Luftdruckwert an. Die Ablesung sollte von jedem Teilnehmer durchgeführt werden !
- Ablesung des großen Barographs neben dem Stationsbarometer.
- Wiederholung der Siedebarometermessung.
- Dosenbarometer und Psychrometer zum obersten Balkon des Institutsgebäudes bringen und Druck und Lufttemperatur ablesen. Am Eingang des Gebäudes die gleichen Messungen wiederholen.

Auswertung und Fragen:

1. Man berechne die Temperatur- und Schwerekorrektur des Stationsbarometers (ß=51.5° Breite, z=244 *m ü. NN*).
2. Die Druckwerte von Siedebarometer, Dosenbarometer und Stationsbarometer sind auf Meeresniveau zu reduzieren (alle Angaben in *hPa* !). Diskutiere die auftretenden Abweichungen und vergleiche mit der Anzeige des Barographen.
3. Man berechne die Höhe des Institutsgebäudes aus den beiden Ablesungen des Dosenbarometers auf dem Balkon und am Gebäudeeingang (Hinweis: Benutze die barometrische Höhenformel und löse nach Δz auf, Gl. 5.9).
4. Man schätze mit Hilfe der statischen Grundgleichung, *Gl. 5.9*, den relativen Fehler der ermittelten Haushöhe ab. Welche Messung bewirkt den größten Fehler ? (Hinweis: Bestimme die relativen Fehler für ΔP, T und P. Der Fehler für Δz ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung).
   Wäre die Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit hier sinnvoll ?
5. Welcher geometrischen Höhe entsprechen 5000 geopotentielle Meter (5000 m')
   a) am Pol; b) in Göttingen; c) am Äquator ?
   Man berücksichtige auch die Änderung von g mit der Höhe (Hinweis: Setze in die Definitionsgleichung des Geopotentials, *Gl. 5.16*, die Schwereformeln, *Gl. 5.12 und Gl. 5.13*, ein und löse nach z auf.)
6. Welchen Luftdruck errechnet man für die Höhe des Gipfels der Zugspitze (2962 *m*), wenn man in München (530*m*) von 950 *hPa* und 10 °*C* ausgeht, als mittlere Temperaturabnahme 0.5 *K*/100*m* annimmt ? (Hinweis: Verwende die Höhenformel für polytrope Schichtung).
   Bei welcher Temperatur siedet Wasser bei diesem Druck?
7. Welcher Druck in *hPa* herrscht, wenn auf einem Schiff a) am Pol; b) am Äquator bei 18 °*C* am Stations-Barometer p=750 *Torr* abgelesen wird ? (Hinweis: Beachte die Temperatur- und Schwerekorrektur).